Logika – historia i przyszłość.
Księga jubileuszowa dedykowana
Profesorowi Janowi Zygmuntowi

Acta Universitatis Wratislaviensis
No 4429

Logika – historia i przyszłość. Księga jubileuszowa dedykowana Profesorowi Janowi Zygmuntowi

Pod redakcją
Kamila Cekiery, Marka Magdziaka
i Marcina Selingera

Logika — historia i przyszłość. Księga jubileuszowa dedykowana Profesorowi Janowi Zygmuntowi
Redakcja: Kamil Cekiera, Marek Magdziak, Marcin Selinger

Recenzent: Piotr Kulicki
Redakcja: Monika Karolczuk
Skład i łamanie: Adam Dębski
na podstawie projektu makiety Grupy Projektor
Projekt i opracowanie graficzne okładki: Małgorzata Szałyga
Ilustracja na okładce: freepik.com

ISSN 0239-6661 (AUWr)
ISSN 3071-6748 (AUWr online)
ISBN 978-83-68705-46-1 (druk)
ISSN 978-83-68705-47-8 (PDF)

Druk: Mazowieckie Centrum Poligrafii sp. z o.o.

Uniwersytet Wrocławski

Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego
ul. F. Joliot-Curie 12, 50-383 Wrocław
tel. 71 3757684, e-mail: wydawnictwo@uwr.edu.pl

Spis treści

Od redaktorów

Oddajemy w ręce Czytelników tom *Logika — historia i przyszłość*, przygotowany z okazji osiemdziesiątych urodzin Profesora Jana Zygmunta. Tytuł księgi dobrze oddaje zarówno zakres zgromadzonych w niej tekstów, jak i główne obszary zainteresowań Jubilata — logikę formalną, jej historię oraz perspektywy dalszego rozwoju. Profesor Jan Zygmunt należy bowiem do grona uczonych, którzy potrafią łączyć wnikliwe badania nad przeszłością dyscypliny z otwartością na jej przyszłe kierunki. Jego prace z historii dwudziestowiecznej logiki polskiej szły w parze z konsekwentnym namysłem nad tym, jak logikę rozwijać i jak wykorzystywać jej narzędzia w filozofii oraz naukach pokrewnych.

W pamięci pracowników i wielu gości Katedry Logiki zapisała się pewna anegdota. W gabinecie Profesora przez kilka lat wisiała kartka z cytatem Johna von Neumanna o Kurcie Gödlu: „How can any of us be called professor when Gödel is not?". Jan Zygmunt kartkę umieścił w takim miejscu, by każdy mógł sentencję przeczytać — i może zastanowić się nad jej treścią. Ten pełen ironii i autoironii gest świadczy o Jego zdrowym dystansie do siebie, skromności, krytycyzmie wobec siebie i innych, docenianiu tych, których uważał za lepszych. Jednocześnie Profesor był badaczem oddanym nauce, wymagającym i życzliwym nauczycielem oraz człowiekiem zaangażowanym w życie akademickiej wspólnoty. Codziennie obecny w swoim gabinecie, nikomu nie szczędził czasu na konsultacje i rozmowy o sprawach logiki i Akademii.

Droga naukowa Profesora Zygmunta związana była kolejno z Krakowem i Wrocławiem. Po studiach (1968) w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Krakowie i doktoracie (1972) pod kierunkiem profesora Stanisława J. Surmy obronionym na Wydziale Filozoficzno-Historycznym Uniwersytetu Jagiellońskiego, związał się na wiele lat z wrocławskim środowiskiem filozoficznym. Znalazł zatrudnienie dzięki życzliwości i poparciu profesorów: Ryszarda Wójcickiego, Bogusława

Iwanusia, Marii Kokoszyńskiej-Lutmanowej oraz Tadeusza Kubińskiego. Najpierw (1971–1982) pracował w mającym siedzibę we Wrocławiu Zespole Logiki IFiS PAN, a następnie — od 1974 na pół etatu, a w latach 1982–2015 na pełnym etacie — na Uniwersytecie Wrocławskim. W 1983 roku habilitował się z logiki formalnej, a w 1996 uzyskał tytuł profesora nauk humanistycznych. Przez ponad dwie dekady kierował Katedrą Logiki i Metodologii Nauk na Wydziale Nauk Społecznych, a w latach 1985–1989 pełnił funkcje prodziekańskie na Wydziałach FilozoficznoHistorycznym i Nauk Społecznych. Był też okresowo zatrudniany w innych uczelniach: w WSP w Częstochowie (1992–1996) i na Uniwersytecie Opolskim (1996–1999), gdzie wykładał logikę matematyczną i teorię mnogości, a następnie w PWSZ im. Witelona w Legnicy (1999–2010), gdzie prowadził zajęcia z logiki ogólnej i metodologii nauk.

Działalność Jana Zygmunta jest przeniknięta duchem kooperacji — zdolnością i gotowością do interesowania się badaniami innych oraz do czynnego włączania się w nie. Profesor Bogusław Wolniewicz powiedział o Nim kiedyś, że „w dobie atomizacji życia naukowego ci pracownicy, którzy wykazują tę cechę ducha kooperacji, winni być ze wszech miar promowani, bo są jak drożdże dodane do ciasta". Jan Zygmunt pozostawił wiele prac wspólnych z innymi autorami — wystarczy spojrzeć na poniższą bibliografię, by odczytać ich nazwiska — i angażował się ponad przeciętną miarę w prace redakcyjne oraz organizacyjne na rzecz środowiska logicznego.

Przez trzy dekady współtworzył kwartalnik *Studia Logica*, w latach 1991–1994 pełniąc funkcję redaktora naczelnego. Był pierwszym redaktorem *Bulletin of the Section of Logic* oraz redagował liczne tomy z serii *Acta Universitatis Wratislaviensis: Logika*. W 1996 r. był pomysłodawcą, a następnie — wraz z Piotrem Wojtylakiem i Januszem Czelakowskim — współorganizatorem corocznych konferencji *Applications of Logic in Philosophy and the Foundations of Mathematics*. Spotkania te na trwałe wpisały się w kalendarz polskich wydarzeń logicznych i są pielęgnowane po dziś dzień przez uczniów, współpracowników i młodszych kolegów Jubilata.

Do najważniejszych osiągnięć edytorsko-naukowych Profesora należy również dwutomowe wydanie *Pism logicznofilozoficznych* Alfreda Tarskiego w serii *Biblioteka Współczesnych Filozofów*. Przygotowanie tego wyboru — obejmującego przekład, redakcję naukową i obszerne komentarze — było przedsięwzięciem wymagającym wyjątkowej kompetencji i skrupulatności.

Należy także wspomnieć o wkładzie Jana ZYGMUNTA w rozwój logiki formalnej oraz jej historii. Jako członek Zespołu Logiki IFiS PAN, kierowanego przez profesora Ryszarda Wójcickiego, podejmował zagadnienia charakterystyczne dla badań prowadzonych w tym Zespole. Najogólniej rzecz ujmując, dotyczyły one abstrakcyjnych logik zdaniowych, rozważanych z perspektywy metodologii systemów dedukcyjnych i badanych metodami algebraicznymi oraz teorio-modelowymi. Pierwszym przyczynkiem do tej problematyki był artykuł *A note on direct products and ultraproducts of logical matrices* (1974), a jej zwieńczeniem — praca habilitacyjna *An Essay in Matrix Semantics for Consequence Relations* (1984). Poświęcona jest ona relacjom wynikania wielownioskowego (*multiple-conclusion consequence relations*). Szczególny nacisk położono w niej na ustalenie własności tych relacji, które są generowane przez macierze logiczne, zwłaszcza przez skończone zbiory skończonych macierzy.

W międzyczasie powstały także prace wspólne z Jackiem Hawrankiem, dotyczące pojęcia stopnia matrycowej (macierzowej) złożoności logiki zdaniowej, rozumianego jako najmniejsza liczba macierzy wystarczająca do scharakteryzowania operacji konsekwencji danej logiki. O jednej z tych prac recenzent *Mathematical Reviews*, Wolfgang Rautenberg, napisał: „The paper is well organized and a pleasure for the reader". Warto dodać, że oparta na przyjaźni współpraca Jana ZYGMUNTA i Jacka Hawranka trwała przez wiele lat i zaowocowała także innymi wspólnymi publikacjami (m.in. dotyczącymi krat warunkowodystrybutywnych, które pojawiły się w kontekście ontologii sytuacji Bogusława Wolniewicza).

Jeśli chodzi o historię logiki *sensu stricto*, Jan ZYGMUNT jest autorem oryginalnych, naukowych biografii dwudziestowiecznych polskich logików: Jana Kalickiego, Mojżesza Presburgera, Alfreda Tarskiego, Romana Suszki (wspólnie z Mieczysławem Omyłą), Jerzego Słupeckiego (wspólnie z Janem Woleńskim), Adolfa Lindenbauma (wspólnie z Robertem Purdym) oraz Józefy Mehlbergowej (wspólnie z Mariuszem Pandurą). Ważne miejsce w jego dorobku zajmuje również esej o genezie pojęcia ultraproduktu: *On the sources of the notion of the reduced product*, a także zarys rozwoju polskiej logiki po II wojnie światowej (wspólnie z Ryszardem Wójcickim).

***

Dziękujemy wszystkim Autorom, którzy zechcieli uczcić Profesora Jana ZYGMUNTA, włączając swoje teksty do tej księgi. Ich życzliwa i entuzjastyczna odpowiedź najlepiej świadczy o miejscu, jakie Jubilat zajmuje w środowisku logików i filozofów. Szczególnie ciepłe podziękowania kierujemy do Profesora Mieczysława Omyły, będącego niejako *spiritus movens* naszego wydawniczego przedsięwzięcia. Dziękujemy też serdecznie Profesorom Januszowi Czelakowskiemu i Jackowi Malinowskiemu za pomoc w ustaleniach faktograficznych, a także Profesorowi Eugeniuszowi Wojciechowskiemu za udostępnienie fotografii Jubilata, zrobionej w Szklarskiej Porębie podczas przerwy w obradach XIX Konferencji *Applications of Logic in Philosophy and the Foundations of Mathematics*.

Kamil Cekiera,
Marek Magdziak,
Marcin Selinger

Bibliografia prac Jana Zygmunta

A. Prace w czasopismach

1. *Rozprawa doktorska Kurta Gödla (XVI Konferencja Grupy Tematycznej Historii Logiki PAN, Kraków, 25 IV 1970)*, „Ruch Filozoficzny" 19, 1971, nr 3–4, s. 297–300.
2. *Direct product of consequence operations*, „Bulletin of the Section of Logic" 1, 1972, nr 4, s. 61–64.
3. *On the sources of the notion of the reduced product*, „Reports on Mathematical Logic" 1, 1973, s. 53–67.
4. *A note on direct products and ultraproducts of logical matrices*, „Studia Logica" 33, 1974, nr 4, s. 349–357.
5. (współautor: A. Wroński) *Remarks on the free pseudo-boolean algebra with one-element free-generating set*, „Reports on Mathematical Logic" 2, 1974, s. 77–81.
6. (współautor: J. Malinowski) *Results in general theory of matrices for sentential calculi with applications to the Łukasiewicz logics*, "Acta Universitatis Wratislaviensis" 352, „Logika" 6, 1978, s. 43–57.
7. *Entailment relations and matrices I,* „Bulletin of the Section of Logic" 8, 1979, nr 2, s. 112–115.
8. (współautor: J. Hawranek) *A theorem of the degree of complexity of some sentential logics*, „Bulletin of the Section of Logic" 9, 1980, nr 2, s. 67–69.
9. *Notes on decidability and finite approximability of sentential logics*, „Bulletin of the Section of Logic" 10, 1981, nr 1, s. 38–40.
10. *The logical investigations of Jan Kalicki*, „History and Philosophy of Logic" 2, 1981, nr 1–2, s. 41–53.

11. (współautor: J. Hawranek) *Another proof of Wojtylak's theorem*, „Bulletin of the Section of Logic" 10, 1981, nr 2, s. 80–81.

12. (współautor: J. Hawranek) *On the degree of complexity of sentential logics. A couple of examples*, „Studia Logica" 40, 1981, nr 2, s. 141–153.

13. *Uwagi o konsekwencjach matrycowych*, "Acta Universitatis Wratislaviensis" 517, „Logika" 8, 1983, s. 47–58.

14. *An application of the Lindenbaum method in the domain of strongly finite sentential calculi*, "Acta Universitatis Wratislaviensis" 517, „Logika" 8, 1983, s. 59–68.

15. *On decidability and finite approximability of sentential logics*, "Acta Universitatis Wratislaviensis" 517, „Logika" 8, 1983, s. 69–81.

16. (współautor: J. Hawranek) *O normalnych rozszerzeniach logik zdaniowych*, "Acta Universitatis Wratislaviensis" 605, „Logika" 10, 1983, s. 17–29.

17. (współautor: J. Hawranek) *Some elementary properties of conditionally distributive lattices*, „Bulletin of the Section of Logic" 12, 1983, nr 3, s. 117–120.

18. (współautor: J. Hawranek) *Notes on the semantics for the logic with semi-negation*, „Bulletin of the Section of Logic" 12, 1983, nr 4, s. 152–155.

19. (współautor: J. Hawranek) *On the degree of complexity of sentential logics II. An example of the logic with semi-negation*, „Studia Logica" 43, 1984, nr 4, s. 405–413.

20. (współautor: M. Omyła) *Roman Suszko (1919–1979): A bibliography of the published work with an outline of his logical investigations*, „Studia Logica" 43, 1984, nr 4, s. 421–441.

21. *An Essay in Matrix Semantics for Consequence Relations*, "Acta Universitatis Wratislaviensis" 741, „Logika" 12, 1984, 76 s. [przedruk w: *Universal Logic, Ethics, and Truth: Essays in Honor of John Corcoran (1937–2021)*, red. T.J. Madigan, J.Y. Béziau, Cham 2024, Springer-Birkhäuser, s. 253–299].

22. (współautor: J. Hawranek) *O kratach warunkowo dystrybutywnych*, "Acta Universitatis Wratislaviensis" 1017, „Logika" 13, 1988, s. 63–72.

23. (współautor: J. Woleński), *Jerzy Słupecki (1904–1987): Life and work*, „Studia Logica" 48, 1989, nr 4, s. 401 –411.

24. *A bibliography of the published work of Jerzy Słupecki*, „Studia Logica" 48, 1989, nr 4, s. 413–421.

25. *Wokół* Prawdy i dowodu *Alfreda Tarskiego. Propozycja dydaktyczna dotycząca twierdzenia Gödla o niezupełności i twierdzenia Tarskiego o niedefiniowalności*, „Edukacja Filozoficzna" 7, 1989, s. 11–28.

26. *Mojżesz Presburger — życie i twórczość*, „Ruch Filozoficzny" 47, 1990, nr 3/4, s. 199–212.

27. (współautor: J. Hawranek) *Comments on a question of Wolniewicz*, „Bulletin of the Section of Logic" 19, 1990, nr 4, s. 128–132.

28. *Mojżesz Presburger: Life and work*, „History and Philosophy of Logic" 12, 1991, nr 2, s. 211–223.

29. (współautor: J. Hawranek) *Wokół pewnego zagadnienia z dziedziny półkrat górnych z jednością*, "Acta Universitatis Wratislaviensis" 1445, „Logika" 15, 1993, s. 59–68 [przedruk: „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria" 27, 2018, nr 3, s. 163–174].

30. *Programy badawcze w dziedzinie logiki formalnej w Szkole Warszawskiej 1918–1939*, „Sprawozdania Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego. Seria A", 50, 1995 [wyd. 1996], s. 59–65.

31. *A short biographical sketch of Tadeusz Kubiński (1929–1991)*, "Acta Universitatis Wratislaviensis" 1890, „Logika" 17, 1997, s. 5–7.

32. *A bibliography of Tadeusz Kubiński*. "Acta Universitatis Wratislaviensis" 1890, „Logika" 17, 1997, s. 9–18.

33. *Alfred Tarski*, „Edukacja Filozoficzna" 29, 2000, s. 274–307.

34. (współautor: R. Wójcicki) *Logika polska okresu powojennego: próba rzutu oka wstecz*, „Nauka" 2002, nr 4, s. 157–175.

35. *Bibliografia prac naukowych Marii Kokoszyńskiej-Lutmanowej*, „Filozofia Nauki" 12, 2004, nr 2, s. 155–166.

36. (współautor: R. Purdy) *Adolf Lindenbaum: Notes on his life, with bibliography and selected references,* „Logica Universalis" 8, 2014, nr 3–4, s. 285–320.

37. *O pewnym epizodzie w kontaktach naukowych Jacka Hawranka i Jana Zygmunta z Profesorem Bogusławem Wolniewiczem*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria" 27, 2018, nr 3, s. 149–162.

38. (współautor: M. Pandura) *Kilka uzupełnień do artykułu Lecha Maligrandy o Izydorze Blumenfeldzie*, „Antiquitates Mathematicae" 18, 2024, s. 45–69.

39. (współautor: M. Pandura) *Józefa Mehlbergowa. Filozofka — działaczka społeczna — matematyczka*, „Res Historica" 59, 2025, s. 1509–1564.

B. Prace w wydawnictwach zbiorowych

1. *Kurt Gödel's doctoral dissertation*, [w:] *Studies in the History of Mathematical Logic*, red. S.J. Surma, Wrocław 1973, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, s. 153–163.
2. *A survey of the methods of proof of the Gödel-Malcev's completeness theorem*, [w:] *Studies in the History of Mathematical Logic*, red. S.J. Surma Wrocław 1973, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, s. 165–238.
3. *Nauka o liczbie. Cz. II*, [w:] *Materiały pomocnicze do nauczania matematyki w szkole podstawowej. Wykłady telewizyjne*, red. B. Noweckiego. Warszawa 1973, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, s. 197–208. [Wyd. 2, Warszawa 1978, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, s. 205–216.]
4. *The logical investigations of Jan Kalicki*, [w:] *Proceedings of the 24th Conference for the History of Logic, Cracow, April 28–30, 1978*, red. J.K. Kabziński, Kraków 1980, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, s. 125–137.
5. *Tadeusz Kubiński*, [w:] *Uczeni wrocławscy*, t. 2: *1974–1994*, red. J. Trzynadlowski, Wrocław 1995, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, s. 81–82.
6. *Maria Kokoszyńska-Lutmanowa*, [w:] *Uczeni wrocławscy*, t. 3: *Członkowie Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego. 1953–1996*, red. J. Kolbuszewski, Wrocław 1996, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, s. 41–44.
7. *Bogusław Iwanuś*, [w:] *Uczeni wrocławscy*, t. 3: *Członkowie Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego. 1953–1996*, red. J. Kolbuszewski, Wrocław 1996, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, s. 77–81.
8. (współautor: J. Hawranek) *O identyczności logicznej*, [w:] *Skłonność metafizyczna: Bogusławowi Wolniewiczowi w darze*, red. M. Omyła, Warszawa 1997, Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, s. 193–203.
9. *Polish logic*, [hasło w:] *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, t. 7: *Nihilism to Quantum mechanics*, red. E. Craig, New York 1998, Routledge, s. 492–500.

10. *Kokoszyńska-Lutmanowa Maria*, [hasło w:] *Encyklopedia Wrocławia*, red. J. Harasimowicz, Wrocław 2000, Wydawnictwo Dolnośląskie, s. 365.
11. *Kubiński Tadeusz*, [hasło w:] *Encyklopedia Wrocławia*, red. J. Harasimowicz, Wrocław 2000, Wydawnictwo Dolnośląskie, s. 434.
12. *Słupecki Jerzy*, [hasło w:] *Encyklopedia Wrocławia*, red. J. Harasimowicz, Wrocław 2000, Wydawnictwo Dolnośląskie, s. 763.
13. *Alfred Tarski,* [w:] *Polska filozofia powojenna.* 2, red. W. Mackiewicz, Warszawa 2001, Agencja Wydawnicza Witmark, s. 342–375; fot.
14. (współautor: J. Hawranek) *Problematyka adekwatności matryc logicznych w pracach Romana Suszki*, [w:] *Idee logiczne Romana Suszki*, red. M. Omyła, Warszawa 2001, Wydawnictwo IFiS PAN, s. 53–71.
15. *O wspólnych badaniach Jerzego Łosia i Romana Suszki w teorii modeli*, [w:] *Idee logiczne Romana Suszki*, red. M. Omyła, Warszawa 2001, Wydawnictwo IFiS PAN, s. 37–52.
16. (współautor: R. Wójcicki) *Polish logic in postwar period*, [w:] *Trends in Logic: 50 Years of Studia Logica*, red. V.F. Hendricks, J. Malinowski, Dordrecht 2003, Springer, s. 11–33.
17. *Tarski Alfred*, [hasło w:] *Powszechna Encyklopedia Filozofii*, red. A. Maryniarczyk, Lublin 2009, Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, 33 s., https://www.ptta.pl/pef/pdf/t/tarski_alfred.pdf [dostęp: 16.12.2025].
18. *Alfred Tarski — logik i metamatematyk*, [w:] *O przyrodzie i kulturze*, red. E. Dobierzewska-Mozrzymas, A. Jezierski, Wrocław 2009, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, s. 305–327.
19. *Zermelo a Szkoła Warszawska: pierwszy dowód twierdzenia o dobrym uporządkowaniu*, [w:] *Panorama współczesnej filozofii polskiej: księga pamiątkowa VIII Polskiego Zjazdu Filozoficznego*, red. J. Jadacki. Warszawa 2010, Semper, s. 290–296.
20. (współautor: R. Purdy) *Tarski's first published contribution to general metamathematics*, [w:] *Universal Logic: An Anthology*, red. J.Y. Béziau, Basel 2012, Springer-Birkhäuser, s. 59–66.
21. *Structural consequence operations and logical matrices adequate for them*, [w:] *Universal Logic: An Anthology*, red. J.Y. Béziau, Basel 2012, Springer-Birkhäuser, s. 163–175.

22. *O twierdzeniu Cantora o przekątnej i jego uogólnieniu*, [w:] *Współczesna teoria i praktyka badań społecznych i humanistycznych*, t. 2, red. J. Juchnowski, R. Wiszniowski, Toruń 2013, Wydawnictwo Adam Marszałek, s. 218–229.
23. *A Letter to Professor Jean-Yves Beziau*, [w:] *The Road to Universal Logic*: *Festschrift for the 50th Birthday of Jean-Yves Beziau*. Vol. 2, red. A. Koslow, A. Buchsbaum, Cham 2015, Springer International Publishing, s. 3–6.
24. *Alfred Tarski: Auxiliary notes on his legacy*, [w:] *The Lvov-Warsaw School. Past and Present*, red. Á. Garrido, U. Wybraniec-Skardowska, Cham 2018, Springer-Birkhäuser, s. 425–455.
25. (współautor: R. Purdy) *Adolf Lindenbaum, metric spaces and decompositions*, [w:] *The Lvov-Warsaw School. Past and Present*, red. Á. Garrido, U. Wybraniec-Skardowska, Cham 2018, Springer-Birkhäuser, s. 505–550.
26. *Nota historyczno-redakcyjna* [do artykułu: R. Suszko, red. J. Zygmunt, *O kongurencjach w rachunkach zdań i konsekwencjach inwariantnych*], [w:] *Język, struktura, ontologia: pamięci Romana Suszki*, red. D. Leszczyńska-Jasion, Sz. Chlebowski, A. Tomczyk, A. Zakosztowicz, Poznań 2022, Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM & Wydawnictwo Fundacji Humaniora, s. 383–388.
27. (współautorzy: R. Duda, W. Piotrowski) *Bielecki, Bronisław (25 VIII 1883 Czerwony Dwór – 15 XII 1967)*, [hasło w:] *Słownik biograficzny matematyków polskich*, red. R. Duda, Kraków 2024, Polska Akademia Umiejętności, s. 27a.
28. *Janiczak, Antoni (30 X 1923 Równe – 3 VII 1951 Warszawa)*, [hasło w:] *Słownik biograficzny matematyków polskich*, red. R. Duda, Kraków 2024, Polska Akademia Umiejętności, s. 146b.
29. *Kruszewski, Zbigniew (27 XII 1900 Warszawa – ?)*, [hasło w:] *Słownik biograficzny matematyków polskich*, red. R. Duda, Kraków 2024, Polska Akademia Umiejętności, s. 196b.
30. (współautorzy: R. Duda, M. Mikołajczyk) *Krynicki Michał (3 II 1950 Warszawa – 12 X 2011 Warszawa)*, [hasło w:] *Słownik biograficzny matematyków polskich*, red. R. Duda, Kraków 2024, Polska Akademia Umiejętności, s. 198b–199a.
31. (współautor: R. Murawski) *Seipelt-Lawęcka, Lidia (5 IX 1898 Łódź – 1951)*, [hasło w:] *Słownik biograficzny matematyków polskich*, red. R. Duda, Kraków 2024, Polska Akademia Umiejętności, s. 369b.

32. *Słapczyński, Adam (8 I 1888 Radom – jesień 1942 KL Auschwitz)*, [hasło w:] *Słownik biograficzny matematyków polskich*, red. R. Duda, Kraków 2024, Polska Akademia Umiejętności, s. 381b–382a.
33. *Vielrose, Egon Herbert (30 XII 1907 Dąbrowa Górnicza – 21 X 1984 Warszawa)*, [hasło w:] *Słownik biograficzny matematyków polskich*, red. R. Duda, Kraków 2024, Polska Akademia Umiejętności, s. 440a–b.

C. Recenzje i noty

1. *A. Engel: Celowość wprowadzenia nowych działów matematyki stosowanej do nauczania matematyki*, „Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli" 24, 1971, nr 2, s. 117–119. [Referat z dwóch artykułów A. Engela opublikowanych w „Educational Studies in Mathematics" 1, 1968, nr 1/2, s. 202–221, oraz 2, 1969, nr 2/3, s. 257–269.]
2. *Closure spaces, closure homomorphisms and universal algebra* (*review of some papers by S. Burris*), „Bulletin of the Section of Logic" 1, nr 2, 1972, s. 38–43. [Referat z trzech artykułów S. Burrisa: *Representation theorems for closure spaces*, „Colloquium Mathematicum" 19, 1968, s. 187–193; *The structure of closure congruences*, ibid. 24, 1971, s. 3–5; *Closure homomorphisms*, „Journal of Algebra" 15, 1970, s. 68–71.]
3. Recenzja dwóch artykułów: M. Gould, *Multiplicity type and subalgebra structure in universal algebras*, „Pacific Journal of Mathematics" 26, 1968, s. 469–485; M. Gould, *Multiplicity type and subalgebra structure in infinitary universal algebras*, „Colloqium Mathematicum" 24, 1971, s. 109–116. „Bulletin of the Section of Logic" 1, nr 3, 1972, s. 72–76.
4. Recenzja książki: D.C. Makinson, *Topics in Modern Logic*. „Studia Logica" 35, 1976, nr 3, s. 323–326.
5. *Research project on strongly finite sentential calculi*, „Bulletin of the Section of Logic" 6, nr 2, 1977, s. 87–90. [Nota w skrócie przedstawia plan badawczy i niepublikowane opracowanie R. Wójcickiego i J. Zygmunta, pt. *Results and open problems in the theory of strongly finite logics*, Technical Report No. 1/SF, IFiS PAN: Wrocław 1977, 25 s.]
6. (współautor: J. Malinowski) Recenzja pracy: R. Suszko, *Abolition of the Fregean Axiom*, [w:] *Logic Colloquium: Symposium on Logic*

Held at Boston, 1972–73, red. R. Parikh. „Erkenntnis" 12, 1978, nr 3, s. 369–379.

7. Recenzja książki: M. Tokarz, *Essays in Matrix Semantics of Relevant Logics*. „Studia Logica" 40, 1981, nr 4, s. 417–418.
8. Recenzja książki: K.A. Bowen, *Model Theory for Modal Logic. Kripke Models for Modal Predicate Calculi*. „Studia Logica" 42, 1983, nr 1, s. 105–106.
9. (współautor: J. Hawranek) Recenzja książki: C. Smoryński, *Self-Reference and Modal Logic*. „Studia Logica" 46, 1987, nr 4, s. 395–398.
10. Recenzja książki: A. Nowaczyk, *Logiczne podstawy nauk ścisłych*. „Zagadnienia Naukoznawstwa" 24, 1988, nr 1, s. 185–189.
11. Recenzja książki: M. Hallet, *Cantorian Set Theory and the Limitation of Size*. „Studia Logica" 49, 1990, nr 2, s. 283–284.

D. Prace redakcyjne

12. (współredaktor: I. Niiniluoto) *Proceedings of the Finnish-Polish-Soviet Logic Conference, Polanica Zdrój*, *Poland*, *September 7 – 12*, *1981*, „Studia Logica" 42, 1983, nr 2–3, s. 117–371. S. 117–118: I. Niiniluoto, J. Zygmunt, *Preface*.
13. "Acta Universitatis Wratislavienis" 1445, „Logika" 15, Wrocław 1993, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, 129 + [3] s. (Pamięci Profesora Tadeusza Kubińskiego (1923–1991), wieloletniego kierownika Katedry Logiki i Metodologii Nauk oraz redaktora serii „Logika").
14. (współredaktor: A. Wiśniewski) *Erotetic Logic, Deontic Logic, and Other Logical Matters: Essays in Memory of Tadeusz Kubiński*, „Acta Universitatis Wratislaviensis" 1890, „Logika" 17, Wrocław 1997, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, 173 s.
15. (współredaktor: M. Magdziak) „Acta Universitatis Wratislaviensis" 2754, „Logika" 23, Wrocław 2005, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, 202 s.
16. Alfred Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*. T. 1, *Prawda*, wybrał, przeł. [z ang.], red. nauk. dokonał, wstępem i przypisami opatrzył Jan Zygmunt; bibliogr. A. Tarskiego oprac. Steven Givant, uzup. Jan Zygmunt. Warszawa 1995, Wydawnictwo Naukowe PWN, Biblioteka Współczesnych Filozofów, XXIV + 390 s. S.VII–XX: J. Zygmunt, *Alfred Tarski – szkic biograficzny*. S. XXI–XXIV:

J. Zygmunt, *Od redaktora naukowego i tłumacza*. – Część tekstu tł. z jęz. ang.

17. Alfred Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne.* T. 2, *Metalogika*, wybrał, przeł., red. nauk. dokonał, przypisami opatrzył i wstępem poprzedził Jan Zygmunt. Warszawa 2001, Wydawnictwo Naukowe PWN, Biblioteka Współczesnych Filozofów, XIV + 516 s. S. VII–XIV: J. Zygmunt, *Od redaktora naukowego i tłumacza*. – Bibliogr. s. 473–500. – Tekst tł. z jęz. ang.
18. B. Wolniewicz, *Ontologia sytuacji: podstawy i zastosowania*, redakcja naukowa J. Zygmunt. Wyd. 2, Warszawa 2019, Wydawnictwo Naukowe PWN, 133 s.

E. Tłumaczenia

1. Tłumaczenie z francuskiego na angielski: S. Jaśkowski, *Three contributions to the two-valued propositional calculus*, „Studia Logica" 34, 1975, s. 121–132.
2. Tłumaczenie z francuskiego na angielski: S. Jaśkowski, *About certain groups of classes of sets and their application to the definitions of numbers*, „Studia Logica" 34, 1975, s. 133–144.
3. Tłumaczenie z polskiego na angielski: R. Dutkiewicz, *The method of axiomatic rejection for the intuitionistic propositional logic*, „Studia Logica" 48, 1989, s. 449–459.
4. Tłumaczenie z polskiego na angielski: K. Hałkowska, *A note on matrices for systems of nonsense-logics*, „Studia Logica" 48, 1989, s. 461–464.
5. Tłumaczenie z angielskiego na polski osiemnastu prac A. Tarskiego, [w:] *op. cit*. A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1 i 2.
6. (współautor R. Purdy) Tłumaczenie z francuskiego na angielski: A. Tarski, *Remarks on fundamental concepts of the methodology of Mathematics*, [w:] *Universal Logic: An Anthology*, red. J.Y. Béziau, Basel 2012, Springer-Birkhäuser, s. 67–68.

Kamil Cekiera
Uniwersytet Wrocławski | ORCID: 0000-0002-9047-2196

Dyrektywalna teoria znaczenia Ajdukiewicza a współczesne teorie semantyczne

Abstrakt: W swoich pracach z pierwszej połowy lat trzydziestych Kazimierz Ajdukiewicz, wybitny polski logik i filozof, zaproponował nowatorską koncepcję znaczenia, która przeszła do historii pod nazwą dyrektywalnej teorii znaczenia (DTZ). Pomysłowość ujęcia znaczenia przez Ajdukiewicza opierała się na zaproponowaniu przez niego teorii semantycznej *de facto* bez semantyki — w szczególności DTZ programowo unika pojęć prawdy i odniesienia (referencji). Znaczenie w zaproponowanej przez Ajdukiewicza teorii określane jest w kategoriach czysto syntaktycznych oraz pragmatycznych i wyznaczane przez dyrektywy znaczeniowe — reguły, których przestrzeganie niezbędne jest, by być uznanym za członka danej społeczności językowej. Szczegółowa eskpozycja DTZ pozwoliła Ajdukiewiczowi na ścisłe zdefiniowanie takich kluczowych pojęć semantycznych jak równoznaczność, synonimiczność czy przekład, którymi często filozofowie posługują się w dość luźny i niejasny sposób w konstruowaniu teorii znaczenia. Niemniej jednak, w obliczu krytyki DTZ przez Alfreda Tarskiego, Ajdukiewicz dość szybko porzucił swą koncepcję, ta zaś z biegiem lat popadała stopniowo w zapomnienie. W niniejszym artykule zamierzam jednak wskazać, że było to cokolwiek niefortunne, jako że DTZ antycypowała wiele znacznie późniejszych rozważań nad teoriami znaczenia, unikając równocześnie niektórych ich problemów. W tekście tym zamierzam w szczególności pokazać, w jaki sposób podstawowe idee Ajdukiewicza zgodne są z popularnymi i szeroko dyskutowanymi współcześnie teoriami semantycznymi, takimi jak choćby inferencjalizm semantyczny czy semantyka ról pojęciowych. Argumentuję, że sięgnięcie do DTZ pozwoliłoby w ich ramach na pełniejsze i ściślejsze skonstruowanie adekwatnej teorii znaczenia.

Słowa kluczowe: dyrektywalna teoria znaczenia, inferencjalizm semantyczny, semantyka ról pojęciowych

Wstęp

Jednym z najszerzej dyskutowanych zagadnień analitycznej filozofii języka była od jej początków próba zbudowania adekwatnej teorii znaczenia. Nie powinno to dziwić, wszak koncentracja filozofów analitycznych na języku oraz szerokie korzystanie ze środków formalnologicznych od zawsze stanowiło cechę dystynktywną tej tradycji filozoficznej, a kwestie dotyczące semantyki są dla tych rozważań kluczowe.

W niniejszym tekście podjęta zostanie próba porównania klasycznej teorii znaczenia zaproponowanej przez polskiego filozofa i logika Kazimierza Ajdukiewicza z pewnymi teoriami semantycznymi popularnymi we współczesnej filozofii analitycznej. Tytułowe określenie „teoria semantyczna" zostało tu zastosowane w sensie szerokim, odnoszącym się do teorii proponujących wyjaśnienie pojęcie znaczenia językowego wyrażeń oraz pojęć pokrewnych, takich jak chociażby synonimiczność, równoznaczność czy przekład. Choć idee zaproponowane przez Ajdukiewicza są w tym kontekście niezwykle wartościowe, jego teoria w niewystarczający sposób wykorzystywana jest we współczesnych debatach. Jak będę starał się wykazać, jest to okoliczność niefortunna, jako że sięgnięcie do dyrektywalnej teorii znaczenia może być dla rozważań dotyczących znaczenia nad wyraz owocne.

Struktura niniejszego tekstu jest bardzo prosta. Podzielony jest on na trzy zasadnicze części. Pierwsza poświęcona jest teorii Ajdukiewicza. Referuję w niej pokrótce najważniejsze jej wątki, nie tyle jednak próbując przedstawiać ją w kompleksowy sposób (to zresztą, ze względu na jej bogactwo, nie byłoby w ramach tego tekstu możliwe), co akcentując pewne istotne wątki oraz założenia Ajdukiewicza, które dobrze wpisują się w prowadzone współcześnie debaty. Podobnie część druga, poświęcona współczesnym teoriom znaczenia, w tym w szczególności inferencjalizmowi semantycznemu Brandoma oraz tak zwanej semantyce ról pojęciowych, nie ma na celu ich pełnej ekspozycji, lecz zaakcentowanie wątków zbieżnych z dyrektywalną teorią znaczenia. Teorie Ajdukiewicza oraz współczesne bezpośrednio zestawione zostają w części trzeciej, gdzie staram się wskazać nie tylko na istotne podobieństwa, ale argumentować też, w jakich aspektach i dlaczego dyrektywalna teoria znaczenia warta jest współcześnie uwagi. Rozważania te prowadzą do wniosku, że niektóre jej idee są wciąż płodne i warto do Ajdukiewicza wracać, konstruując właściwą koncepcję znaczenia wyrażeń w języku.

I

Dyrektywalna teoria znaczenia (DTZ) została zaproponowana i przedstawiona przez Ajdukiewicza przede wszystkim w dwóch artykułach napisanych w pierwszej połowie lat trzydziestych: *O znaczeniu wyrażeń* z 1931 roku (Ajdukiewicz, 1985a) oraz *Języku i znaczeniu* z 1934 roku (Ajdukiewicz, 1985b). Ta druga praca opublikowana została pierwotnie po niemiecku (pod tytułem *Sprache und Sinn*) w „Erkenntnis", flagowym czasopiśmie przedstawicieli Koła Wiedeńskiego. O ile w pierwszym tekście Ajdukiewicz stara się przede wszystkim wyłożyć główne motywacje stojące za stworzoną przez niego teorią, wprost wyrazić pewne elementarne intuicje za nią stojące, tak w drugim DTZ znajduje swój pełny wyraz i rozległą ekspozycję. Jest to bowiem teoria rzeczywiście dość zawiła i na pozór nieoczywista, choć bez wątpienia pod wieloma istotnymi względami pionierska.

Paradoksalny charakter teorii znaczenia Ajdukiewicza dostrzec można od razu: jest to wszak teoria znaczenia, która programowo wręcz stroni od semantyki, zwłaszcza zaś od pojęć prawdy i odniesienia (referencji). W istocie opiera się ona w całości na pojęciach syntaktycznych oraz pragmatycznych. Nie było to oczywiście kwestią przypadku — komentując po blisko trzydziestu latach, Ajdukiewicz sam swoje motywacje do unikania pojęć semantycznych wiązał z tym, że artykuły te były „pisane w czasie, gdy droga do definicji pojęć nazwanych później semantycznymi [...] była najeżona antynomiami" (Ajdukiewicz, 1985c, s. VI). W kontekście tym można wręcz mówić o pewnego rodzaju duchu epoki, który — jak zauważa Anna Brożek (2020, s. 131) — charakteryzował się dużą nieufnością wobec semantyki tradycyjnej, równocześnie poprzedzając jeszcze pojawienie się semantyki teoriomodelowej[1]. Język zatem ujmowany jest w DTZ od strony syntaktycznej przez słownictwo i zasady składni, zaś od strony pragmatycznej przez akty przyjmowania lub odrzucania zdań.

Zanim jednak przejdziemy do bliższej charakterystyki wizji języka zaproponowanej przez Ajdukiewicza, powiedzmy najpierw kilka słów o elementarnych motywacjach i założeniach dotyczących znaczenia stojących za DTZ. Po pierwsze, Ajdukiewicz podkreśla fundamentalnie istotny normatywny aspekt języka. Swój wyraz znajduje to przede

1 Może stąd nasunąć się wniosek, że w czasie prac nad DTZ przełomowe prace Alfreda Tarskiego (zwłaszcza *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* z 1933 roku) nie były Ajdukiewiczowi znane. Jak przekonująco wykazuje jednak Adam Olech, wniosek ten jest raczej błędny — wydaje się, że Ajdukiewicz był na bieżąco z najnowszymi wynikami Tarskiego, lecz po prostu podchodził do nich z pewną rezerwą (zob. Olech, 1993, s. 158–162).

wszystkim w samej charakterystyce dyrektyw językowych: tylko ta osoba może zostać uznana za członka danej społeczności językowej, która w odpowiednich okolicznościach gotowa jest uznać lub odrzucić dane zdanie, zgodnie z odpowiednią dyrektywą. Po drugie, Ajdukiewicz wychodzi od ważnej obserwacji, że „[z]naczenie, jakie ktoś łączy z pewnym wyrażeniem, zależy od rodzaju myśli, które nim wyraża lub zwykle wyraża" (Ajdukiewicz, 1985b, s. 150). Dla ustalenia znaczenia danego wyrażenia kluczowe są zatem, jak określa to Ajdukiewicz, związki motywacyjne, czyli innymi słowy — utrzymywane przez dany podmiot przekonania. Pociąga to za sobą i taką konsekwencję, że zmiana odpowiednich przekonań pociągać będzie za sobą zmianę znaczenia odpowiednich wyrażeń[2]. Po trzecie wreszcie, Ajdukiewicz stanowczo podkreśla, co blisko sto lat temu było zupełnie nowym spojrzeniem na tę problematykę, że znaczenia poszukiwać należy w samym języku, nie zaś gdzieś w obiektywnej sferze pozajęzykowej czy w sferze psychologicznej danego użytkownika języka. Takie poglądy na znaczenie prezentowane były odpowiednio przez teorię Millowską oraz asocjacjonizm, stanowiska, które Ajdukiewicz drobiazgowo krytykuje, stwierdzając wreszcie, że w przeciwieństwie do nich jego „próba uchwycenia tego, na czym znaczenie nazw polega, będzie się tego znaczenia doszukiwała w samym języku" (Ajdukiewicz, 1985a, s. 124).

Historycznie patrząc, podejście to z pewnością ma swoje korzenie w semantycznych pracach Gottloba Fregego, który znacząco wpłynął na zmianę sposobu myślenia o pojęciu znaczenia w dwudziestowiecznej filozofii. Jak zauważa Bogdan Dziobkowski (2016, s. 26), w *Die Grundlagen der Arithmetik* Frege przyjmuje i rozwija dwie zasadnicze tezy: po pierwsze, znaczenie nie jest stanem mentalnym, po drugie, nie przynależy ono w pierwszym rzędzie słowom, ale zdaniom, w których są one użyte. Ta zaprezentowana przez Fregego zmiana myślenia o znaczeniu — którą Willard Van Orman Quine określił jako „doniosłą reorientację w semantyce" (Quine, 2000, s. 68) — wyraźnie widoczna jest w teorii zaproponowanej przez Ajdukiewicza. O przyjęciu przez niego pierwszej z wymienionych tez była już mowa, wyraźnie też zgadza się on z prosentencjalną koncepcją znaczenia. Jakkolwiek zazwyczaj pisze on ogólnie o wyrażeniach języka, to sedno DTZ sprowadza się do uznawania lub odrzucania określonych zdań, w zgodzie z dyrektywami języka.

2 Co, jak zauważa Janusz Maciaszek, wyraźnie wskazuje na holistyczny aspekt teorii Ajdukiewicza (zob. Maciaszek, 2008, s. 282).

Jak dobrze wiadomo, Ajdukiewicz zaproponował trzy rodzaje dyrektyw (zastrzegając wszak, że nie rości sobie pretensji do zupełności tego wyliczenia): aksjomatyczne, dedukcyjne i empiryczne. W przypadku pierwszych użytkownik danego języka zobowiązany jest przyjąć dane zdanie bezwarunkowo. Nietrudno wskazać na tego rodzaju dyrektywy w formalnych językach systemów aksjomatycznych, Ajdukiewicz uważa jednak, że dyrektywy te właściwe są również językowi naturalnemu, stwierdzając wręcz, że „wszystkie tzw. *a priori* oczywiste zdania wskazują na aksjomatyczną dyrektywę znaczeniową" (Ajdukiewicz, 1985b, s. 155). Dyrektywy dedukcyjne określają, jakie zdania użytkownik danego języka powinien być gotów uznać, jeśli uznał inne zdania. Innymi słowy, dyrektywy te przyporządkują zdaniu (lub zdaniom) użytym jako przesłanka pewne inne zdanie będące wnioskiem, które użytkownik rozumiejący znaczenie danych wyrażeń zobowiązany jest uznać. Jeśli zatem przykładowo ktoś uznaje pewną implikację oraz jej poprzednik, to odpowiednia dyrektywa języka zobowiązuje go do uznania również jej następnika (co jest wyrazem inferencyjnej reguły *modus ponens*). Wreszcie trzeci typ dyrektyw dotyczy zdań, które użytkownik danego języka zobowiązany jest uznać w obliczu określonych okoliczności empirycznych, czyli doznaniu pewnego wrażenia. Dyrektywy empiryczne Ajdukiewicz dzieli jeszcze dalej na dwa podrodzaje: proste i złożone. W przypadku tych pierwszych użytkownik danego języka zobowiązany jest uznać pewne zdanie po prostu wobec doznania pewnego wrażenia, zaś drugie charakteryzują się tym, że poza samym elementem empirycznym do czynienia mamy też dodatkowo z określonym niewyartykułowanym sądem[3].

Ogólny schemat zastosowania dyrektyw byłby w DTZ następujący: tylko ten użytkownik danego języka J łączy z wyrażeniami tego języka przypisane im znaczenie, kto w okolicznościach O gotowy jest uznać (lub odrzucić) dane zdanie Z. Jakkolwiek element pragmatyczny — uznanie lub odrzucenie danego zdania — identyczny jest w przypadku wszystkich rodzajów dyrektyw, to różne są właściwe im okoliczności. Dyrektywy aksjomatyczne nakazują uznać pewne zdania bezwarunkowo, zatem zbiór O wyznaczony jest przez wszystkie możliwe okoliczności. W przypadku dyrektyw dedukcyjnych okoliczności stanowią pewne uprzednio zaakceptowane już zdania (przesłanki). Z kolei dla dyrektyw empirycznych okolicznościami są albo dane doznawane przeżycia (dla

3 Mowa tu oczywiście o sądzie w sensie logicznym, który rozumieć możemy po prostu jako treść logiczną zdania. Ajdukiewicz *explicite* odróżnia takie rozumienie od sądu w sensie psychologicznym, który ujmuje sąd jako pewne zjawisko psychiczne właściwe samemu procesowi sądzenia (zob. Ajdukiewicz, 1985a, s. 146–149).

dyrektyw prostych), albo przeżycia oraz dodatkowo uznawane zdania (dyrektywy złożone). Wedle Ajdukiewicza dla każdego języka możliwe byłoby (przynajmniej w teorii) wyznaczenie zbioru tego rodzaju dyrektyw, które odpowiednie okoliczności łączyłyby z uznaniem odpowiednich zdań (zob. Ajdukiewicz, 1985b, s. 130).

Z dyrektywami wiąże się jeszcze jedno bardzo istotne pojęcie, mianowicie zakresu dyrektywy. Zakres może być określony osobno w stosunku do każdego z rodzajów dyrektyw. W przypadku dyrektyw aksjomatycznych zakresem będzie po prostu klasa zdań, które należy bezwarunkowo uznać. Odnośnie do dyrektyw dedukcyjnych i empirycznych możemy mówić o pewnego rodzaju relacji łączącej jedne zdania z innymi (dyrektywy dedukcyjne) czy dane doświadczenia ze zdaniami (dyrektywy empiryczne). Zakresem dyrektyw dedukcyjnych i empirycznych byłaby klasa par złożonych ze zdania bądź danej empirycznej i zdania. Jeśli jakieś wyrażenie znajduje się w zakresie dyrektywy znaczeniowej, to dyrektywa ta dotyczy tego wyrażenia. Tu znów Ajdukiewicz wprowadza istotne rozróżnienie: dyrektywa dotyczyć może wyrażenia w sposób nieistotny bądź istotny. Z tym pierwszym przypadkiem do czynienia będziemy mieć wtedy, gdy zmiana danego wyrażenia przez inne wyrażenie tego samego typu logicznego nie spowoduje zmiany zakresu dyrektywy. W przeciwnym wypadku dyrektywa dotyczyć będzie wyrażenia w sposób istotny. Ajdukiewicz ilustruje to następującym przykładem (zob. Ajdukiewicz, 1985b, s. 157–158). Przypuśćmy, że w danym języku naturalnym mamy dyrektywę aksjomatyczną o treści „każde A jest A". Jeśli zamienimy wyrażenie „jest" wyrażeniem „kocha" (i *vice versa*, zakładając, że w języku tym funkcjonują dyrektywy zawierające ten predykat), to ulegnie zmianie zakres dyrektyw znaczeniowych w języku. Podobnie w przypadku wyrazu „każde", gdybyśmy zastąpili go słowem z tej samej kategorii syntaktycznej, na przykład „żadne". Zakres dyrektywy nie zmieniłby się jednak przy zamianie wyrażenia „A" przez dowolne inne tego samego typu logicznego. Stąd też w przykładzie tym dyrektywa dotyczy istotnie wyrażeń „każde" czy „jest", ale już nieistotnie wyrażenia „A".

Analiza ta prowadzi Ajdukiewicza do zaproponowania definicji równoznaczności, w myśl której dwa wyrażenia danego języka są równoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy zastąpienie jednego wyrażenia drugim nie zmieni całkowitego zakresu dyrektyw danego języka. Pisząc o całkowitym zakresie, Ajdukiewicz ma na myśli po prostu sumę zakresów dyrektyw. Jest to o tyle istotne, że nie ma znaczenia kolejność dyrektyw, która w takim przypadku może ulec zmianie. Tę ważną intuicję Ajdukiewicza w przystępny sposób omawia Paweł Grabarczyk:

> Równoznaczność dwóch terminów oznacza po prostu tyle, że zamieniając odpowiednie terminy miejscami, zmieniamy jedynie kolejność dyrektyw na liście. Jeśli na liście znajduje się jakieś zdanie Z_1 zawierające termin A oraz zdanie Z_2 zawierające termin B, to równoznaczność terminów A i B oznacza po prostu to, że ich wzajemne zastąpienie w tych zdaniach przekształci zdanie Z_1 w Z_2 i odwrotnie, zmianie ulegnie więc tylko miejsce wystąpienia danego zdania na liście. Odpowiada to bardziej intuicyjnemu stwierdzeniu, że dwa wyrażenia mają to samo znaczenie, gdy dyrektywy „mówią o nich" to samo. (Grabarczyk, 2018, s. 79)

Takie skonstruowanie pojęcia relacji równoznaczności miało jednak dla teorii Ajdukiewicza poważne skutki. Definicja ta wydaje się bowiem prowadzić do niepożądanych dla DTZ konsekwencji, na co uwagę Ajdukiewiczowi zwrócił niebawem po publikacji artykułu *Język i znaczenie* Alfred Tarski. Jego zarzut wobec DTZ (który znamy tylko z dużo późniejszej relacji Ajdukiewicza, jako że Tarski sformułował go w prywatnej rozmowie) można najprościej przedstawić następująco. Załóżmy, że mamy język, w którym obowiązują następujące dyrektywy aksjomatyczne:

$$A \neq B$$
$$B \neq A$$

Uznajmy też, że terminy A i B występują wyłącznie w tych dyrektywach znaczeniowych tego języka. Zgodnie z definicją równoznaczności ich wzajemne zastąpienie nie zmieni sumy zakresów dyrektyw tego języka, a zatem muszą one zostać uznane za równoznaczne. Niemniej choć na gruncie DTZ terminy A i B mają to samo znaczenie, to zgodnie z dyrektywami aksjomatycznymi mają one różne denotacje. Konsekwencja, zgodnie z którą dwa wyrażenia mogą mieć to samo znaczenie, ale różne odniesienie, była dla Ajdukiewicza nie do przyjęcia[4]. Zarzut Tarskiego sprawił, że Ajdukiewicz *de facto* zarzucił swoją teorię, komentując po bez mała trzydziestu latach, że jest on „nie do odparcia" oraz „wskazuje [...] na to, że pojęcia znaczenia nie można definiować za pomocą samych środków syntaktycznych bez zastosowania pojęć semantyki, w węższym tego słowa rozumieniu" (Ajdukiewicz, 1985d, s. 397). Tego jednak, o czym już była mowa, Ajdukiewicz chciał w DTZ uniknąć[5].

---

4 Niekontrowersyjny, przynajmniej od czasów Fregego, jest przypadek odwrotny, kiedy dwa wyrażenia mają to samo odniesienie, ale różne znaczenie (zob. Frege, 2014).

5 Jak sugeruje Paweł Grabarczyk, w istocie Ajdukiewicz mógłby to zrobić po prostu poprzez wprowadzenie czwartego rodzaju dyrektyw, odniesienia, które w ścisły sposób łączyłyby znaczenie z odniesieniem (zob. Grabarczyk, 2018, s. 90). W podobnym duchu dość oczywiste rozwiązanie problemu Tarskiego — dodanie warunku identyczności denotacji do definicji równoznaczności — sugeruje Jerzy Giedymin we wstępie do angielskiego wydania wybranych tekstów Ajdukiewicza (zob. Giedymin, 1978, s. XLVII).

Wydaje się jednak, że postawiony przez Tarskiego problem da się rozwiązać, zachowując przy tym asemantyczny charakter DTZ. Jedna z propozycji jest autorstwa Adama Nowaczyka (2006), który zamiast Ajdukiewiczowskiego warunku wzajemnego zastępowania — czyli zamieniania dwóch wyrażeń we wszystkich miejscach, w których występują — proponuje warunek zwykłego zastępowania w dowolnym kontekście. Jeśli zatem przykładowo w danym języku uznamy zdanie A = A, to zastąpienie tylko jednego wyrażenia A wyrażeniem B sprawi, że otrzymana równość A = B będzie stała w sprzeczności z przyjętymi dyrektywami aksjomatycznymi. Nie będzie zatem możliwości zamiany A i B bez zmiany sumy zakresów dyrektyw tego języka, a zatem wyrażenia te nie będą uznane za równoznaczne. Jeszcze inne rozwiązanie tego problemu proponuje Paweł Grabarczyk (2013a), wedle którego DTZ może być rozumiana jako teoria tak zwanej wąskiej treści.

W każdym razie zaproponowana przez Ajdukiewicza definicja relacji równoznaczności przydatna staje się dla sformułowania ścisłej definicji znaczenia. Jako że relacja ta jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, znaczenie może zostać zdefiniowane jako klasa abstrakcji od relacji równoważności. Znaczenie dowolnego wyrażenia W jest więc w języku L tą własnością, która przysługuje W oraz wszystkim wyrażeniom równoznacznym W (synonimom W) na mocy przyjętej uprzednio relacji równoznaczności (por. Ajdukiewicz, 1985a, s. 133–134). Mówiąc o omawianej relacji równoznaczności, Ajdukiewicz zauważa też, że relację tę pojąć możemy jako równowartościowość inferencyjną (Ajdukiewicz, 1985a, s. 132). Dwie nazwy znaczyć będą to samo, intuicyjnie ujmując, jeśli w języku wywnioskować możemy z nich to samo. Ideę równowartościowości inferencyjnej Ajdukiewicz nieco ściślej podjął w *Języku i znaczeniu*, gdzie wprowadzone zostało kolejne techniczne, acz niezwykle istotne pojęcie — macierzy języka.

Macierz języka to po prostu tabela zbudowana z wyrażeń będących w zakresie dyrektyw danego języka wedle następujących zasad. Pierwsza część tabeli odnosi się do dyrektyw aksjomatycznych i składa się z wierszy odpowiadających kolejnym dyrektywom. W wierszach tych dyrektywy rozpisane zostają wedle następującego porządku: najpierw całe wyrażenie, potem funktor główny, następnie pierwszy argument funktora, po nim funktor główny pierwszego argumentu i tak dalej, aż pozostaną nam nieanalizowalne dalej elementy wyrażeń. Przykładowo następująca dyrektywa aksjomatyczna klasycznego rachunku zdań: $[p \rightarrow \sim(q \vee r)] \rightarrow [p \rightarrow (\sim q \vee r)]$ zapisana zostałaby w wierszu matrycy następująco (kolejne elementy oddzielone są przecinkami):

$$[p \to \sim(q \lor r)] \to [p \to (\sim q \lor r)], \to, p \to \sim(q \lor r), \to, p, \sim(q \lor r), \sim, q \lor r, \lor, q, r, p \to (\sim q \lor r), \to, p, \sim q \lor r, \lor, \sim q, \sim, q, r$$

Wiersz ten składałby się zatem z 20 pozycji, określających syntaktyczne role poszczególnych wyrażeń. Zauważmy na przykład, że na pozycjach 2, 4 i 13 znajdziemy to samo wyrażenie (funktor implikacji), podobnie jak chociażby na pozycjach 5 i 14 (wyrażenie *p*). Poszczególne wiersze dla dyrektyw dedukcyjnych i empirycznych byłyby podobne, tyle że uwzględniałyby wpierw w osobnej części[6] okoliczności warunkujące (motywujące) uznanie danego zdania — czyli inne zdania w przypadku dyrektyw dedukcyjnych oraz dane empiryczne (część pozajęzykowa) w dyrektywach empirycznych. Zauważmy, że dysponując tak zbudowaną macierzą języka, łatwo jest unaocznić, kiedy dwa wyrażenia są równoznaczne. Dzieje się tak wtedy, gdy ich wzajemna zamiana we wszystkich miejscach w matrycy nie zmienia sumy dyrektyw danego języka (zmienić może się kolejność dyrektyw, co jednak z punktu widzenia DTZ pozostaje bez znaczenia).

Macierz języka pozwala też powiedzieć Ajdukiewiczowi nieco więcej o samym pojęciu znaczenia. Po pierwsze, może on wprowadzić ścisłe określenie przekładu. Język J jest przekładalny na język J' wtedy i tylko wtedy, gdy relacja równoznaczności pozwala każdemu wyrażeniu J przyporządkować takie wyrażenie J', że macierz J przechodzi w macierz J' (zob. Ajdukiewicz, 1985b, s. 170)[7]. Innymi słowy, dwa języki są przekładalne, gdy ich macierze są izomorficzne — gdy mają taką samą strukturę. Mówiąc nieco bardziej metaforycznie i obrazowo: dwa wyrażenia różnych języków będą swoimi przekładami, jeśli będzie można nimi w identyczny sposób wypełnić matrycę o określonej strukturze. Jak słusznie zauważa Paweł Grabarczyk (2019, s. 15–16), pozwala to mówić o dwóch poziomach znaczenia. Na poziomie płytszym, nadanie językowi znaczenia byłoby po prostu wypełnieniem matrycy odpowiednimi wyrażeniami, czyli — używając terminologii samego Ajdukiewicza — przyporządkowaniem wyrażeniom ich znaczeń. Na poziomie głębokim natomiast znaczeniem byłaby sama struktura matrycy, co Ajdukiewicz

6 W istocie Ajdukiewicz mówi tu o uporządkowanych parach ciągów. Macierz języka dużo łatwiej przedstawić jednak w formie klasycznej tabeli, podzielonej na dwie części odpowiadające okolicznościom uznania danego zdania (ta część w przypadku dyrektyw aksjomatycznych pozostaje pusta, jako że zdania objęte przez nie mają być zaakceptowane w każdych okolicznościach) i samemu uznanemu zdaniu. Przykłady tego rodzaju tabel — również w formie bezwyrażeniowej, obrazującej samą strukturę inferencyjną języka — odnaleźć możemy w pracach Pawła Grabarczyka (np. 2018, 2019).

7 Z braku miejsca na dokładniejsze omówienia pomijam tu pewne istotne aspekty DTZ zakładane przez Ajdukiewicza, takie jak podział na języki zamknięte i otwarte czy spójne i niespójne.

określa mianem aparatury pojęciowej. Ostatecznie zatem znaczeniem wyrażenia W w języku J moglibyśmy określić uporządkowaną parę <SJ, M>, gdzie SJ jest strukturą języka J (aparatem pojęciowym), zaś M zbiorem wszystkich miejsc, które dane wyrażenie zajmuje w tej strukturze. Pozwala to zgodzić się z zaskakującą na pierwszy rzut oka konstatacją Janusza Maciaszka, że „[p]odstawową jednostką znaczeniową nie jest u Ajdukiewicza ani wyraz, ani zdanie, lecz cały język” (Maciaszek, 2008, s. 276).

II

W drugiej połowie XX wieku debata w obrębie filozofii języka dotycząca adekwatnej teorii znaczenia rozgorzała z nową mocą. Można wskazać wiele powodów tego stanu rzeczy, ale jednym z najważniejszych były bez wątpienia prace dwóch filozofów, którzy zreorientowali sposób myślenia o znaczeniu w anglosaskiej filozofii analitycznej. Mowa tu o Ludwigu Wittgensteinie z późnego okresu jego twórczości (i zwłaszcza ideach zawartych w wydanych w 1953 — już po jego śmierci — *Dociekaniach filozoficznych* [Wittgenstein, 2005]) i pozostającym do pewnego stopnia pod jego wpływem Wilfridzie Sellarsie (zob. zwłaszcza 1953, 2023). Wspólne dla obu autorów są przede wszystkim dwa przeświadczenia. Pierwsze, które określić moglibyśmy zwrotem pragmatycznym, każe upatrywać znaczenia przede wszystkim w użyciu języka. Nie chodzi wszak oczywiście o jakiekolwiek użycie, ale takie, które kieruje się odpowiednimi regułami. Stąd też drugie dotyczące znaczenia założenie Wittgensteina i Sellarsa nazwać możemy zwrotem normatywnym — fundamentalne dla znaczenia jest użycie języka zgodnie z określonymi regułami.

Podejście do problematyki znaczenia różnić może się też pod innym względem. Po pierwsze, tradycyjne podejście w filozofii opierało się na ustalaniu znaczenia elementarnych, subzdaniowych części znaczeniowych języka (takich jak chociażby nazwy, stałe logiczne czy predykaty), z których następnie treści znaczeniowe niejako nabywają bardziej złożone elementy języka, czyli zdania. Przeciwna strategia, o której była już mowa, polega na potraktowaniu zdań jako pierwotnych nośników znaczenia, które charakteryzują znaczenie części składowych poprzez ich odpowiednie funkcje czy też role pojęciowe. Tę drugą strategię amerykański filozof Robert Brandom nazywa odgórną (ang. *top-down*), łącząc ją zarazem z tezą o pierwszeństwie sensu (intensji) nad referencją (ekstensją) w teorii znaczenia (zob. Brandom, 2007, s. 651–652).

W ostatnich publikacjach Brandom zwraca też coraz częściej uwagę na dwie zasadnicze tradycje filozoficzne w obrębie teorii znaczenia w XX wieku. Pierwsza to tradycja logiczno-semantyczna, której paradygmatem jest język matematyki, nadrzędnym celem uzyskanie możliwie największej precyzji i ścisłości, a narzędziami między innymi rozmaite rachunki logiczne, teoria modeli czy semantyka światów możliwych. Do tradycji tej Brandom zalicza między innymi Fregego, Russella, wczesnego Wittgensteina, Tarskiego, Carnapa czy Kripkego. Druga tradycja jest zasadniczo pragmatyczna i swoje źródła ma w pracach późnego Wittgensteina[8], klasycznych pragmatystów amerykańskich jak Peirce, James czy Dewey, Rorty'ego czy Price'a. Wedle tych filozofów znaczenie pojmować trzeba przede wszystkim w jego aspekcie społecznym, komunikacyjnym, ekspresywnym, za paradygmat ujmując język naturalny. Tradycje te rozwijały się zasadniczo niezależnie i nie wchodząc w kooperację. Brandom zaś za cel stawia sobie ich pogodzenie (zob. Brandom, 2025, s. 1–4).

Brandoma uznać możemy za autora jednej z najpopularniejszych, najgłośniejszych i najszerzej dyskutowanych teorii znaczenia ostatnich lat, nazwanej przez niego samego inferencjalizmem[9]. Zasadnicza myśl inferencjalizmu zasadza się na podstawowej idei, że znaczenie wyrażeń w języku wyznaczone jest przez reguły inferencyjne. Paradygmatycznym przypadkiem są tutaj stałe logiczne, takie jak spójniki logiczne, których znaczenie wyznaczone może być poprzez inferencyjne reguły dołączania i opuszczania. Podobnie znaczenie dowolnych wyrażeń języka, w szczególności empirycznych, może być zdaniem Brandoma scharakteryzowane przez związki inferencyjne. Związki te scharakteryzowane mogą być dwojako — poprzez w a r u n k i stosowalności danych wyrażeń oraz k o n s e k w e n c j e ich zastosowania. Ilustrując to przykładem zwolennika inferencjalizmu Jaroslava Peregrina (2014, s. 21–22), znaczenie terminu 'pająk' scharakteryzowane może być poprzez (*nomen omen*) sieć związków inferencyjnych, wśród których znajdą się takie chociażby warunki stosowalności jak:

(WS$_1$) Jeśli zwierzę ma osiem nóg i tka sieci, jest to pająk

czy takie konsekwencje stosowania jak:

---

8 „Przez pragmatyzm rozumiem pogląd inspirowany myśleniem późnego Wittgensteina, który ujmował problematykę *znaczenia* wyrażeń w szerszym rozumieniu własności warunkujących ich użycie" (Brandom, 2012, s. XI).

9 Główne idee inferencjalizmu Brandom wyłożył w monumentalnej monografii *Making It Explicit. Reasoning, Representing, and Discoursive Commitment* (1994) oraz w licznych artykułach napisanych od momentu publikacji jego *opus magnum*. Jego wykłady dotyczące inferencjalizmu zostały z kolei opublikowane w książce *Articulating Reasons. An Introduction to Inferentialism* (2000).

(KS$_1$) Jeśli coś jest pająkiem, zabicie go nie jest przestępstwem

W przypadku każdego zdania w danym języku (a to zdania, przypomnijmy, są wedle inferencjalistów podstawowymi nośnikami znaczenia) mówić możemy o jego znaczeniu jako wyznaczonym przez potencjał inferencyjny, który scharakteryzować możemy jako parę uporządkowaną <WS, KS>, gdzie WS i KS to po prostu zbiory odpowiednio warunków i konsekwencji stosowania danego wyrażenia (por. Peregrin, 2014, s. 50–51)[10].

Co istotne, choć to formalnologiczne związki inferencyjne są tutaj punktem wyjścia, Brandom stoi na stanowisku, że znaczenie wyrażeń w języku naturalnym opiera się nie tylko na wnioskowaniach formalnych, ale uwzględnia również wnioskowania materialne[11]. Ideę tę — podobnie jak ilustrujące ją przykłady — Brandom zaczerpnął od Sellarsa. Typowe przykłady wnioskowań materialnych przedstawiane przez tych amerykańskich filozofów byłyby następujące:

Pada deszcz	Bielsko-Biała jest na południe od Katowic
Ulice będą mokre	Katowice są na północ od Bielska-Białej

Zapewne odruchem każdego logika byłoby stwierdzenie, że są to po prostu wnioskowania entymematyczne, od „zwykłych" wnioskowań formalnych różni je zatem tylko obecność ukrytych przesłanek — „jeśli pada deszcz, to ulice będą mokre" w pierwszym przypadku oraz „dla każdego x i dla każdego y, jeśli x jest na południe od y, to y jest na północ od x" w drugim (por. Kublikowski, 2019, s. 68, 72). Inferencjaliści upierają się jednak przy pewnego rodzaju pragmatycznym pierwszeństwie wnioskowania materialnego nad formalnym. Ich zdaniem poprawność wnioskowań materialnych zależy w głównej mierze od pozalogicznych związków treściowych i znaczeniowych między odpowiednimi wyrażeniami. Analiza formalnologiczna pojawia się niejako *post factum*, pozwalając wydobyć na światło dzienne, wyeksplikować[12] formalne związki inferencyjne obecne w danych wnioskowaniach czy też poprawiać błędy. Jednakże do wykrycia „wadliwości prostych wnioskowań materialnych potrzebna jest przede wszystkim podstawowa praktyka dyskursywna, polegająca między innymi na korygowaniu twierdzeń i inferencji w czasie realnej wymiany racji" (Kublikowski, 2019, s. 83).

10 Zdaniem Peregrina uogólnione pojęcie potencjału inferencyjnego bliskie jest pojęciu konsekwencji logicznej Tarskiego.

11 Stanowisko to określa mianem mocnego inferencjalizmu, który sytuuje się pomiędzy mocniejszym stanowiskiem hiperinferencjalizmu a słabym inferencjalizmem (zob. Brandom, 2000, s. 28–29).

12 Stąd też tytuł głównego dzieła Brandoma *Making It Explicit*.

Osobnym pytaniem i zarazem wyzwaniem dla inferencjalizmu pozostaje kwestia, jakie w istocie inferencje nadają językowi znaczenie. Innymi słowy, czy dla konstytucji znaczeń pewne wnioskowania są wyróżnione, czy też nie. Inferencjaliści skłaniają się ku odpowiedzi, że nie — to wszystkie poprawne inferencje wyznaczają znaczenie wyrażeń. W jaki sposób jednak możemy określić, kiedy inferencja jest poprawna, skoro rozumiana jest ona tutaj szerzej niż tylko jako wnioskowanie formalnie poprawne? Pytanie to jest tym bardziej problematyczne, że Brandom unika odwoływania się do semantycznych pojęć prawdy i odniesienia (referencji), utrzymując (skądinąd kontrowersyjnie), że „prawda nie odgrywa ważnej roli w filozofii w ogólności, a w inferencjalizmie semantycznym w szczególności" (Szubka, 2012, s. 255). Bez wchodzenia tutaj w dogłębną analizę pobudek i konsekwencji przyjęcia tego stanowiska, można powiedzieć, że przyjmuje on zasadniczo deflacyjny punkt widzenia, w którym predykat „jest prawdziwy" traktowany jest jako spełniający wobec zdań podobną funkcję jak zaimki wobec nazw. Wskazują one po prostu na treść danego sądu, materialnie nic do niego nie dodając. Są zatem swego rodzaju „zazdaniami", dlatego teoria ta nazywana jest czasami zazdaniową (lub prosentencjalną) koncepcją prawdy. Najszerzej znana jest jednak jako anaforyczna koncepcja prawdy (zob. Brandom, 2005)[13].

Chcąc uniknąć użycia pojęcia prawdy, ostatecznie Brandom zmuszony jest opierać swoją koncepcję na kategoriach pragmatycznych, odwołując się do społecznego i normatywnego aspektu konstytuowania znaczenia wyrażeń. Uwidacznia się on w inferencjalizmie (znów pod wpływem prac Sellarsa) w rozróżnieniu rodzajów reguł językowych. Należą one do zasadniczo do trzech kategorii. Pierwszą stanowią językowe reguły wejścia, które określają właściwe zachowania językowe w obliczu określonych danych empirycznych. Przykładowo wypowiedzenie zdania „Ten samochód jest czerwony" warunkowane[14] jest odpowiednim wrażeniem percepcyjnym. Druga grupa reguł to reguły wewnątrzjęzykowe, które odpowiadać będą po prostu poprawnym wnioskowaniom w obrębie języka. Trzeci wreszcie rodzaj reguł to językowe reguły wyjścia. Charakteryzują się one tym, że zrozumienie znaczenia danego wyrażenia

13 Sam Brandom przyjmuje również analogiczną koncepcję w stosunku do drugiego z wyróżnionych pojęć semantycznych — anaforyczną koncepcję odniesienia (zob. Brandom, 1984). Szczegółowe i kompetentne omówienie obu teorii anaforycznych znaleźć można w: Kublikowski, 2019, s. 90–136.

14 Brandom wprowadza w tym kontekście dodatkowe rozróżnienie deontyczne na bycie zobowiązanym (ang. *committed*) i uprawnionym (ang. *entailed*) do przyjęcia danego sądu. Celem uniknięcia złożoności ekspozycji inferencjalizmu kwestię tę tutaj pomijam (zob. Brandom, 2007, s. 658, przypis 6).

skutkuje odpowiednim działaniem czy zachowaniem o charakterze pozajęzykowym. Przykładowo oznaką właściwego zrozumienia przez daną osobę komendy „Stój!" będzie jej zatrzymanie się.

Nacisk inferencjalistów na doniosłość reguł nie jest bez znaczenia. Jak twierdzi Peregrin, są one zasadniczo osią ich podejścia do tego, co wyznacza znaczenie wyrażeń. Jest ono wyznaczone nie po prostu przez inferencje i związki inferencyjne zachodzące między wyrażeniami języka, ale właśnie przez normatywnie pojęte r e g u ł y inferencyjne. Odróżnia to jego zdaniem inferencjalizm semantyczny Brandoma od *prima facie* podobnych koncepcji, takich jak semantyka ról pojęciowych, które choć też pojęcia znaczenia szukają w związkach inferencyjnych, to jednak skupiają się na „wnioskowaniach, które indywidualne podmioty ludzkie rzeczywiście przeprowadzają, lub mają dyspozycję do przeprowadzenia, [podczas gdy] inferencjalizm Brandomowski koncentruje się [...] na inferencyjnych *regułach*" (Peregrin, 2014, s. 9)[15].

Tego rodzaju ogólne stwierdzenia są o tyle kłopotliwe, że — w przeciwieństwie do inferencjalizmu semantycznego — semantyka ról pojęciowych (CRS, *conceptual role semantics*) nie jest jednolitą teorią, a raczej zbiorczą nazwą dla różnorakich koncepcji[16], które łączy jedno zasadnicze założenie: znaczenie wyrażeń (oraz treści mentalnych) konstytuowane jest przez role odpowiednich wyrażeń w języku. W szczególności semantyka ról pojęciowych odrzuca koncepcję, zgodnie z którą „myśli mają wewnętrzną treść [*intrinsic content*] uprzednią wobec użycia pojęć w myśli. Według [semantyki ról pojęciowych] znaczenie i treść wyprowadzane są z użycia, nie odwrotnie" (Greenberg, Harman, 2005, s. 295). Podobieństwo między CRS a inferencjalizmem sprowadza się głównie do tego, że konstytutywne dla znaczenia funkcje czy role pojęciowe poszukiwane są właśnie w związkach inferencyjnych. Racjonalistyczne wersje CRS wprost mówią o eksplikacji ról inferencyjnych, podczas gdy wersje naturalistyczne koncentrują się na rolach przyczynowych danych wyrażeń, czyli faktycznie przeprowadzanych wnioskowaniach przez konkretne empiryczne podmioty (zob. Fodor, Lepore, 1992, s. 168). Kładzie zatem większy akcent na zagadnienia psychologiczne niż normatywne.

Kwestia ta wiąże się z przeświadczeniem o fundamentalnej bliskości pojęć znaczenia i rozumienia. Jak zauważa Jan Woleński, „znaczenie jest tą własnością wyrażeń, dzięki której rozumiemy je" (Woleński, 2007,

---

15 Polemikę z tezą, że to normatywność reguł odróżnia inferencjalizm od semantyki ról pojęciowych znaleźć można w: Posłajko, Grabarczyk, 2018.

16 Najważniejsze różne wersje semantyki ról pojęciowych przedstawione zostały w pracach: Harman, 1982; Block, 1986; Peacocke, 1992; Boghossian, 1993.

s. 184). Intuicję tę podzielają zwolennicy semantyki ról pojęciowych, wedle których zbadanie natury procesów psychologicznych odpowiedzialnych za rozumienie wyrażeń niezbędne jest dla zbudowania właściwej teorii znaczenia. Według Gilberta Harmana, CRS scharakteryzować można w zasadzie jako koniunkcję dwóch twierdzeń: że znaczenie wyrażeń językowych wyznaczane jest przez treść pojęć i myśli, te zaś wyznaczane są przez funkcje i role w psychologii empirycznego podmiotu poznającego (zob. Harman, 1982, s. 242). Rozumienie eksplikować można jednak nie tylko przez odpowiednie role pojęciowe, ale też w zgodzie z intuicją, że rozumieć znaczenie danego wyrażenia to tyle, co potrafić je sparafrazować czy przełożyć. Prowadzi to do przyjmowanej przez niektórych teoretyków CRS translacyjnej koncepcji znaczenia, zgodnie z którą wyrażenia uzyskują znaczenie poprzez odpowiednie inferencyjne role, zaś znać znaczenie danego wyrażenia to dysponować jego przekładem, a zatem wyrażeniem inferencyjnie równoważnym (por. Greenberg, Harman, 2005, s. 299–300).

Warto jeszcze tytułem dygresji nadmienić, że we współczesnej filozofii języka coraz większą popularność zdobywają teorie semantyczne, które jednocześnie akcentują funkcjonalny aspekt znaczenia oraz normatywną naturę pojęć, stroniąc jednak od właściwego dla zarówno inferencjalizmu, jak i CRS holizmu semantycznego. Wedle autorki jednej z takich koncepcji, Amie Thomasson (2024), pragmatyczne podejście do znaczenia, takie jak chociażby przedstawione powyżej, właściwe może być dla c z ę ś c i języka czy szerzej niektórych schematów pojęciowych — w tym wielu interesujących z filozoficznego punktu widzenia — ale nie jest właściwą charakterystyką całego języka. W podobnym duchu Cyrill Mamin (2024) broni tak zwanej neo-fregeańskiej koncepcji pojęć, zgodnie z którą pojęcia charakteryzowane są jako pewnego rodzaju sposoby myślenia o rzeczach implikujące pewne inferencje normatywne. Takie podejście do języka ma w szczególności ułatwić wytłumaczenie fenomenu zmiany znaczeń pojęć funkcjonujących w publicznym dyskursie.

III

Dyrektywalna teoria znaczenia zaproponowana przez Kazimierza Ajdukiewicza pod wieloma względami była koncepcją pionierską. W zupełnie nowatorski sposób podeszła ona do próby wyeksplikowania pojęcia znaczenia, wyprzedzając, jak się okazuje, o więcej niż połowę stulecia formułowane na gruncie analitycznej filozofii języka koncepcje znaczenia wychodzące z podobnych założeń teoretycznych i intuicji. Niestety, choć teorie te stają się coraz bardziej współcześnie popularne, nie korzystają one z wypracowanych w ramach DTZ narzędzi, głównie z tego powodu, że prace Ajdukiewicza pozostają w anglosaskim środowisku filozoficznym zasadniczo nieznane. Co gorsza, sam autor zarzucił — jak się wydaje zbyt pochopnie — swoją koncepcję, przez co na długi czas pozostała ona zapomniana. Tym bardziej, jak sądzę, warto do DTZ wracać, wykorzystując te jej aspekty, które mogą okazać się pomocne w opracowaniu teorii znaczenia.

Przyjrzyjmy się zatem wpierw podobieństwom między DTZ a współczesnymi teoriami semantycznymi prezentowanymi w drugiej części niniejszego tekstu. Po pierwsze, podobnie jak w przypadku inferencjalizmu semantycznego, semantyki ról pojęciowych czy szerzej koncepcji funkcjonalnych, punkt wyjścia Ajdukiewicza jest pragmatyczny. Znaczenie ujmowane jest przez niego asemantycznie, co podobne jest do podejścia Brandoma, nawet jeśli inne były ich motywacje. Prócz samego pragmatyzmu ważne jest także zwrócenie uwagi na społeczny i normatywny charakter języka. W myśl DTZ, jak ujmuje to Paweł Grabarczyk, gdy osoba posługująca się danym językiem sprzeciwia się regułom danego języka, jest ona na straconej pozycji, gdyż to zawsze społeczność językowa ma rację (Grabarczyk, 2019, s. 12). Wspólny DTZ oraz inferencjalizmowi i CRS jest także holizm semantyczny. Także i tu ujawnia się geniusz Ajdukiewicza, antycypującego dość wyraźny trend holistyczny w filozofii języka drugiej połowy XX wieku (zob. Maciaszek, 2007). Wspólne też koncepcjom tym jest uznanie zdań jako podstawowych jednostek sensotwórczych w języku.

Ajdukiewicz podkreślał rolę związków motywacyjnych, układów przekonań, które ujawniają się jako zaktualizowane dyspozycje w aktach mówienia w danym języku (zob. Maciaszek, 2008, s. 280). Ich rola precyzyjnie zostaje wyeksplikowana przy wprowadzeniu pojęcia dyrektyw, czyli reguł językowych. Są one w istocie podobne do zaproponowanych przez Sellarsa reguł, o których mowa w inferencjalizmie. Zasadnicza różnica sprowadza się do braku odpowiednika reguł wyjścia z języka do świata w DTZ oraz, z drugiej strony, braku rozróżnienia między regułami aksjomatycznymi a dedukcyjnymi w inferencjalizmie. Podobnie wszakże charakteryzowana jest równoznaczność inferencyjna, która we wszystkich tych teoriach sprowadza się do synonimiczności wyrażeń o tym samym potencjale inferencyjnym.

Wydaje się niemniej, że pewne aspekty DTZ pozwalają lepiej wyrazić wspólne omawianym teoriom założenia. Recenzując w 2010 roku nowe wydanie kluczowego dzieła Brandoma z 1994 roku, James O'Shea stwierdza, że „*Making It Explicit* [...] to zapewne pierwsza w pełni systematyczna i ścisła [*technically rigorous*] próba wyjaśnienia znaczenia wyrażeń językowych w kategoriach ich społeczno-normatywnego użycia" (O'Shea, 2010). Zapewne nie, chciałoby się powiedzieć — opis ten doskonale bowiem pasuje do wcześniejszej o bez mała sześćdziesiąt lat koncepcji Ajdukiewicza, której ścisłości współczesne teorie mogą tylko zazdrościć. Rzeczywiście jedną z największych zalet DTZ jest to, że kluczowe dla teorii semantycznych pojęcia znaczenia, synonimu, równoznaczności czy przekładu są zdefiniowane ściśle i precyzyjnie, podczas gdy we współczesnych teoriach często używane są dość swobodnie, skutkując popadaniem w pułapki ekwiwokacji. Ściśle wyrażony w DTZ może być także potencjał inferencyjny wyrażeń, dzięki wprowadzonemu przez Ajdukiewicza narzędziu, jakim jest macierz języka. Pozwala ono mówić także o samej strukturze języka i w ściślejszy, jak się wydaje, sposób pozwala na wyrażenie, czym są w istocie role pojęciowe — można bowiem interpretować je jako zbiór miejsc zajmowanych przez dane wyrażenie w macierzy języka, czyli danym aparacie pojęciowym.

Choć dyskutować można, czy brak odpowiednika reguł wyjścia w DTZ nie jest jej minusem (a jak wspominałem, sam Ajdukiewicz nie twierdził, że jego lista rodzajów dyrektyw jest kompletna), to z pewnością brak rozróżnienia na reguły aksjomatyczne i dedukcyjne jest słabością inferencjalizmu. Stroniąc od pojęcia prawdy i postulując równocześnie wagę wnioskowań materialnych, inferencjalizm staje — o czym już wspominałem — przed poważnym wyzwaniem ustalenia, które wnioskowania są konstytutywne dla znaczenia. Przyjęcie reguł aksjomatycznych mogłoby, jak sądzę, przynajmniej częściowo problem ten rozwiązać. Podobnie i część wnioskowań materialnych dałoby się lepiej ująć, wiążąc je z dyrektywami empirycznymi, aczkolwiek językowe reguły wejścia spełniają w inferencjalizmie rzeczywiście podobną funkcję. Schemat działania dyrektyw w DTZ pozwala także dość precyzyjnie ustalić warunki rozumienia wyrażeń, bez konieczności uciekania się do rozważań psychologicznych, z czym mamy do czynienia w semantyce ról pojęciowych. Rozumienie zdań warunkowane jest bowiem poprzez akty akceptowania bądź odrzucania zdań zgodnie z danymi dyrektywami języka, można więc ich rozumienie wyeksplikować w kategoriach czysto behawioralnych[17].

17 Tego rodzaju interpretację DTZ proponuje: Grabarczyk, 2013b. Zdaniem Adama Nowaczyka jedynym, co powstrzymywało Ajdukiewicza przed nadaniem DTZ *explicite* charakteru behawioralnego, było jego przekonanie, że ludzie mogą oszukiwać, symulując asercję (zob. Nowaczyk, 2006, s. 168).

Niemniej by w pełni wykorzystać potencjał DTZ w zestawieniu ze współczesnymi teoriami semantycznymi, zapewne należałoby zaproponować odświeżoną jej wersję[18]. W szczególności, DTZ znajduje swój pełny wyraz w przypadku języków formalnych czy, szerzej, dyskursywnych (za takie Ajdukiewicz uznawał języki, w których nie obowiązują dyrektywy empiryczne), nie mają jednak łatwego zastosowania w przypadku języków naturalnych. Jak stwierdził sam Ajdukiewicz, „tzw. języki potoczne nie są językami w najściślejszym tego słowa znaczeniu, gdyż właściwe im przyporządkowanie znaczeń jest chwiejne i płynne" (Ajdukiewicz, 1985b, s. 156). W związku z tym skupił się on na językach formalnych, choć w obliczu zalet DTZ zasadna wydaje się próba dostosowania teorii również do języków naturalnych. Łączy się z tym jeszcze jedna kłopotliwa okoliczność, która nie została poruszona w niniejszym tekście — DTZ ściśle działa tylko na tak zwanych językach zamkniętych, które sam autor określił po latach mianem fikcji, odrzucając ich koncepcję (Ajdukiewicz, 1985e, s. 175).

Dyrektywalna teoria znaczenia Ajdukiewicza ma już ponad dziewięćdziesiąt lat. Mimo swego wieku wydaje się jednak być w znakomitej kondycji. Warto wracać do niej i wykorzystywać jej zasoby, bo wciąż znakomicie prezentuje się na tle współczesnych koncepcji znaczenia.

Bibliografia

Ajdukiewicz, K. (1985a). Język i znaczenie. Przeł. F. Zeidler. W: *idem*, *Język i poznanie*, t. 1, s. 145–174. Warszawa: PWN.

Ajdukiewicz, K. (1985b). O znaczeniu wyrażeń. W: *idem*, *Język i poznanie*, t. 1, s. 102–136. Warszawa: PWN.

Ajdukiewicz, K. (1985c). Przedmowa. W: *idem*, *Język i poznanie*, t. 1, s. V–VIII, Warszawa: PWN.

Ajdukiewicz, K. (1985d). Zagadnienie empiryzmu a koncepcja znaczenia. W: *idem*, *Język i poznanie*, t. 2, s. 388–400. Warszawa: PWN.

Ajdukiewicz, K. (1985e). W sprawie artykułu prof. A. Schaffa o moich poglądach filozoficznych. W: *idem*, *Język i poznanie*, t. 2, s. 155–191. Warszawa: PWN.

Block, N. (1986). Advertisement for a Semantics for Psychology. *Midwest Studies in Philosophy*, 10 (1), s. 615–678.

Boghossian, P.A. (1993). Does an Inferential Role Semantics Rest upon a Mistake? W: *Philosophical Issues 3*, red. E. Villanueva, s. 73–88. Atascadero: Ridgeview.

Brandom, R. (1984). Reference Explained Away: Anaphoric Reference and Indirect Description. *Journal of Philosophy*, 81 (9), s. 469–492.

Brandom, R. (1994). *Making It Explicit. Reasoning, Representing, and Discoursive Commitment*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Brandom, R. (2000). *Articulating Reasons. An Introduction to Inferentialism*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

18 Próbę taką podjął: Grabarczyk, 2019.

Brandom, R. (2005). Expressive versus Explanatory Deflationism about Truth. W: *Deflationary Truth*, red. B.P. Armour-Garb, J.C. Beall, s. 237–257. Chicago: Open Court.

Brandom, R. (2007). Inferentialism and Some of Its Challenges. *Philosophy and Phenomenological Research*, 74 (3), s. 651–676.

Brandom, R. (2012). *Między mówieniem a działaniem. W stronę analitycznego pragmatyzmu*. Przeł. M. Gokieli. Warszawa: PWN.

Brandom, R. (2025). Introduction: Metavocabularies of Reason. W: U. Hlobil, R. Brandom, *Reasons for Logic, Logic for Reasons. Pragmatics, Semantics, and Conceptual Roles*, s. 1–28. New York-London: Routledge.

Brożek, A. (2020). *Analiza i konstrukcja. O metodach badania pojęć w Szkole Lwowsko-Warszawskiej*. Kraków: Copernicus Center Press.

Dziobkowski, B. (2016). Teorie znaczenia. W: *Przewodnik po filozofii języka*, red. J. Odrowąż-Sypniewska, s. 19–66. Kraków: WAM.

Fodor, J., Lepore, E. (1992). *Holism. A Shopper's Guide*. Oxford-Cambridge, MA: Blackwell.

Frege, G. (2014). Sens i znaczenie. W: *idem*, *Pisma semantyczne*, przeł. B. Wolniewicz, s. 60–88. Warszawa: PWN.

Giedymin, J. (1978). Editor's Introduction: Radical Conventionalism, Its Background and Evolution: Poincaré, LeRoy, Ajdukiewicz. W: K. Ajdukiewicz, *The Scientific World-Perspective and Other Essays, 1931–1963*, red. J. Giedymin, s. XIX–LIII. Dordrecht-Boston: D. Reidel Publishing Company.

Grabarczyk, P. (2013a). Dyrektywalna teoria znaczenia jako teoria znaczenia wąskiego. *Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria*, 22 (4), s. 285–302.

Grabarczyk, P. (2013b). Dyrektywalna teoria znaczenia w interpretacji behawioralnej. W: *Współczesna filozofia języka. Inspiracje i kierunki rozwoju*, red. P. Stalmaszczyk, s. 78–95. Łódź: Primum Verbum.

Grabarczyk, P. (2018). *W poszukiwaniu teorii znaczenia. Próby eksplikacji pojęcia znaczenia w filozofii XX wieku*. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Grabarczyk, P. (2019). *Directival Theory of Meaning. From Syntax and Pragmatics to Narrow Linguistic Content*. Cham: Springer.

Greenberg, M., Harman, G. (2005). Conceptual Role Semantics. W: *The Oxford Handbook of Philosophy of Language*, red. E. Lepore, B.C. Smith, s. 295–322. Oxford: Oxford University Press.

Harman, G. (1982). Conceptual Role Semantics. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 23 (2), s. 242–256.

Kublikowski, R. (2019). *Inferencjalizm semantyczny Roberta B. Brandoma*. Lublin: Wydawnictwo KUL.

Maciaszek, J. (2007). *Holizm znaczeniowy Kazimierza Ajdukiewicza*. Łódź: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Humanistyczno-Ekonomicznej w Łodzi.

Maciaszek, J. (2008). *Znaczenie, prawda, przekonania. Problematyka znaczenia w filozofii języka*. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Mamin, C. (2024). Change Your Way of Thinking. A Neo-Fregean View on Conceptual Engineering. *Studia Philosophica* 83, s. 23–38.

Nowaczyk, A. (2006). Dyrektywalna teoria znaczenia, czyli dramat Filozofa. W: *Sens, prawda, wartość: Filozofia języka i nauki w dziełach Kazimierza Ajdukiewicza, Witolda Doroszewskiego, Tadeusza i Janiny Kotarbińskich, Romana Suszki, Władysława Tatarkiewicza*, red. J. Pelc, s. 165–174. Warszawa: Polskie Towarzystwo Semiotyczne.

Olech, A. (1993). *Język, wyrażenia i znaczenia. Semiotyka Kazimierza Ajdukiewicza*. Częstochowa: Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Częstochowie.

O'Shea, J.R. (2010). Reading Brandom: On *Making It Explicit* [recenzja]. *Notre Dame Philosophical Reviews*, 13.12.2010, https://ndpr.nd.edu/reviews/reading-brandom-on-making-it-explicit/ (dostęp: 27.01.2025).
Peacocke, C. (1992). *A Study of Concepts*. Cambridge, MA: MIT Press.
Peregrin, J. (2014). *Inferentialism. Why Rules Matter*. London: Palgrave Macmillan.
Posłajko, K., Grabarczyk, P. (2018). Inferentialism without Normativity. *Organon F* 25 (2), s. 174–195.
Quine, W.V.O. (2000). Dwa dogmaty empiryzmu. W: *idem*, *Z punktu widzenia logiki*, przeł. B. Stanosz, s. 49–75. Warszawa: Aletheia.
Sellars, W. (1953). Inference and Meaning. *Mind* 62, s. 313–338.
Sellars, W. (2023). Kilka przemyśleń o grach językowych. W: *idem*, *Nauka, percepcja, rzeczywistość*, przeł. S. Wilczewska, s. 479–533. Warszawa: PWN.
Szubka, T. (2012). *Neopragmatyzm*. Toruń: Wydawnictwo Naukowe UMK.
Thomasson, A. (2024). How Should We Think about Linguistic Function? *Inquiry* 67 (3), s. 840–871.
Wittgenstein, L. (2005). *Dociekania filozoficzne*.Przeł. B. Wolniewicz. Warszawa: PWN.
Woleński, J. (2007). *Epistemologia. Poznanie, prawda, wiedza, realizm*. Warszawa: PWN.

Directival theory of meaning and contemporary semantic theories

Abstract: In his works from the early 1930s, Kazimierz Ajdukiewicz**, a** distinguished Polish logician and philosopher, proposed an innovative conception of meaning that is known as the directival theory of meaning (DTM)**.** The originality of Ajdukiewicz's approach lay in his attempt to construct a *semantic theory without semantics* — in particular, the DTM deliberately avoids the notions of truth and reference. In Ajdukiewicz's theory, meaning is defined in purely syntactic and pragmatic terms and is determined by meaning directives — rules that one needs to follow to be recognized as a member of a given linguistic community. Ajdukiewicz's detailed exposition of the DTM enabled him to precisely define such key semantic notions as *equivalence*, *synonymy*, and *translation* — terms that philosophers often employ rather loosely and ambiguously when constructing their theories of meaning. Nevertheless, following Alfred Tarski's criticism of the DTM, Ajdukiewicz rather quickly abandoned his conception, which over time became gradually forgotten. In this paper, however, I argue that this was somewhat unfortunate, as the DTM anticipated many much later discussions on theories of meaning while avoiding some of their inherent difficulties. I aim to show, in particular, how Ajdukiewicz's core ideas align with several contemporary and widely debated semantic frameworks, such as semantic inferentialism and conceptual role semantics. I argue that revisiting the DTM could allow for a fuller and more rigorous construction of an adequate theory of meaning within those frameworks.

Keywords: directival theory of meaning, semantic inferentialism, conceptual role semantics

Janusz Czelakowski
University of Opole | ORCID: 0000-0002-6611-2377

On the conflict of obligatory actions*

To Jan

Abstract: We speak about a conflict of obligations of actions when we come to deal with a pair of obligations, e.g., legal and moral, legal and religious, medical and religious, medical and religious, etc., which mutually exclude execution of the given action. In this work we undertake the task to define the conflict in terms of action systems. Two solutions of the problem are presented. Both are based on action systems as the basic semantic tool. Action systems are set-theoretic constructs defined in Czelalakowski (2015). Though the paper is a continuation of the research undertaken in said study, it seems that the approach to conflicts presented here has not been considered in the deontology of actions.

Keywords: action system, space of states, atomic action, transition relation, permitted action, forbidden action, obligatory action

Introduction

In the standard formulation deontic logic is the formal study of the normative concepts of obligation, permission, and prohibition. According to the approach presented in this work, these deontic concepts are not entirely derived from the notion of action. Actions

* This research was supported by the National Science Centre of Poland (BEETHOVEN, UMO-2014/15/G/HS1/04514).

are deontically loaded—they are permitted, prohibited, or obligatory. The notion of a norm is then secondary—actions are inherent components of norms. This and other issues are thoroughly discussed in Czelakowski (2015).

We begin with presenting some examples which give a better insight into the eponymous problem.

1. Examples

1. A Jehovah's Witness has been involved in a car accident. He is seriously wounded. Blood transfusion can save his life. Blood transfusion is an obligatory action in such "a life-or-death situation" from the medical viewpoint. However, this action is forbidden in light of Jehovah's Witnesses' religious beliefs (namely the refusal to engage in blood transfusions, which they consider a violation of God's law). Accordingly, the Jehovah's Witness refuses.

2. A medical doctor is legally obliged to perform abortion in a woman who became pregnant in consequence of a rape. However, the doctor refuses to do so, hiding behind the conscience clause. His conscience, and precisely speaking the religion he follows and moral principles which are derivative of it, forbid him to perform any abortion (there is an absolute ban on performing them). As an ardent Catholic he takes the standpoint that religious rules and prohibitions are superior to legal norms of the state.

Such incidents are not infrequent in Poland. Some medical doctors, being persuaded by the Church, sign the so-called conscience clause, which results in excluding the gynecologist from performing abortions in clinics. This situation is tolerated in Poland, although it is not legally instituted.

3. A young man is obliged to serve in the military (Military service is a legal obligation in his state, mandatory to all young males of the given age group). The man refuses to do so, directed by pacifistic principles which he professes. These principles forbid, in an absolute way, to serve in the army.

If the above-sketched incident takes place during the time of peace in a state of established democratic tradition, this man is obligatorily directed to do alternative service. If, on the other hand, the presented incident takes place at the time of a war in a dictatorship, the young man is executed on the power of martial law.

4. A married woman falls in love with another man and leaves her husband, being directed by her love for the other man. In some states such an act is prohibited—women are obligatorily bound to stay with their husbands. In the case of this woman, her behavior qualifies as adultery then and is severely punished by, e.g., stoning to death. What is more, love of a married woman to another man, even if platonic is forbidden.

5. The early-romantic literature exposes the conflict between affection and conditions of heroes' social situation in a very firm manner. The mutual feeling of love between a woman and a man gives rise to lasting forms of their life together (living together, intercourses, setting a family, etc.). These are inescapable forms of behavior and actions which have their source in the affection they share (love results in an internal compelling drive towards determined acts and conduct). On the other hand, one can speak of social determiners, like the heroes' backgrounds, their coming from different social spheres and environments, which casts a shadow over their relationship (for instance, Luise's pure love for Ferdinand in the drama *Intrigue and Love* (*Kabale und Liebe*) by Friedrich Schiller).

How to present situations of a similar type in a rigorous, precise way? In the examples given above, the conflict is a result of *setting the order of executing a given action or prohibition of execution of one against another obligation*. We will try to present this form of collision in an exact way. We will make use of formalism to do so, that is, the so-called elementary action systems. It is action systems along with derived definitions which can determine the semantics of a conflict.

Another understanding of a collision of obligations can concern the *manner* or the *mode* of executing the defined action A. In the given state of things u, the first commitment can oblige to execute A, in order to achieve—as a result—a state of things belonging to a certain established set of states W_1, whereas the other obligation demands, in the same state of things, that A should be carried out in order to achieve a state of the set W_2 which is disjoint with the set W_1. It is clear that in no way can the two commitments be reconciled in the state u. Situations of the above-mentioned type can be considered as hypothetical ones on the syntactical level, that is on the level of *languages* of action and obligations. Such situations are excluded on the semantic level in the models which we present below, since in these models obligations relating to the mode of execution of atomic actions are abstracted. The problem can however be well articulated for *compound* actions within the formalism of Czelakowski (2015).

2. Models and obligations

Action theory assumes its own ontology. This issue is discussed at length by Trypuz (2008) and, to a lesser extent, by Czelakowski (2015). Here we shall confine to the situation theory perspective of the ontology of action outlined in the second work. The category of a situation is central in this ontology. Generaly speaking, actions turn situations into situations. The undertaken actions are also components of situations. Situations, from the mathematical viewpoint, are modelled as complex set-theoretic entities encompassing such factors as states of affairs, spatio-temporal coordinates, agents, the way the agents cooperate etc. It is not necessary to present here a detailed account of situation theory. There is a quite ample literature devoted to this subject. Merely a modest fragment of the theory of situations is assumed here. In the simplified description we shall present, three categories of pertinent objects that make up situations are isolated: states of affairs (simply: states), atomic actions, and compound actions and, to a modest extent, agents of actions. We abstract here from other components of situations.

Atomic actions resemble black boxes. Each atomic from a state being the input leads to a state being the output of the performed action. Thus there are states that form the input of the atomic action and the states that make up the output of the action. A given atomic action undertaken in a given input yields, if performable, a state belonging the input. Each atomic action is therefore identified with a binary relation on the set of states. This is in accordance with the paradigm adopted in dynamic logic. In turn, compound actions are defined as sets of finite sequences of atomic actions. From the formal linguistic perspective, compound actions may be regarded as formal languages over the alphabet formed by the set of atomic actions. The actions we encounter in the everyday situations are compound. We mention a few: baking a bread, manufacturing a card, or making everyday morning toilet. Each of these actions can be performed in various ways depending on the choice of a sequence of atomic actions the given compound action encompasses the agent(s) prefer to run. To each compound action one assigns a binary relation—the resultant relation of the compound action. The resultant relation abstracts from the way a given compound action is performed—the initial states and the final state matter here; the intermediary states and atomic action that make up the compound action are disregarded from the perspective of the resultant relation. Thus the input and output of the resultant relation are relevant; the other factors are omitted. The resultant relation of a compound action is also a binary relation on the set of states. But this resultant relation need not belong to the preselected set of atomic actions. For example, while making the morning toilet, a compound action which may last an hour, we may distinguish other subactions as shaving, washing, dressing up etc. Each of these is also compound; they may be performed in various combinations. As to the resultant relation we distinguish here one initial state in which I am not washed, not shaved and not dressed. There is also one final state in which the things are the other way round: I am washed, shaved and dressed, and ready to make breakfest. Each of the mentioned complex subactions: washing, shaving, dressing etc. can be performed in unlimited number of ways. These and similar issues are discussed in Czelakowski (2015).

As it has been noted, in the approach outlined here it is elementary action systems that are accepted as the right semantic unit serving to present the deontology of actions. An *action system* is a triple $\boldsymbol{M} = (W, R, \boldsymbol{A})$ consisting of a non-empty set W of states, a binary relation $R \subseteq W' \times W$ called the *transition relation* between states, and a non-empty family $\boldsymbol{A}$ of binary relations on W. The elements of $\boldsymbol{A}$ are called *atomic actions* of the system $\boldsymbol{M}$. Thus every atomic action is a binary relation on the set of states W. Although R is also a relation on W, it is not qualified as an atomic action; its role is different. Speaking metaphorically, R defines the limits of freedom of the system $\boldsymbol{M}$; this remark can be made precise—see Czelakowski (2015). R imposes limitations of a definite type on the possibility of direct transitions from some states to others. A great variety of possible interpretations of R is obtained, choosing—in a proper way—interesting classes of action systems. To mention only the most important of these interpretations: the relation R can be interpreted as a physical possibility of a transition from some states into others, or as psychological admissibility for a given man, or as compatibility with a social role, or as compatibility with labour regulations of a given institution. Apart from physical limitations, it is often necessary in some action systems to take into account restrictions that are imposed by law and its regulations. These are *deontic* action systems—some actions in such a system are legally forbidden, e.g., on the strength of traffic regulations, though they may be physically feasible (actions *in fraudem legis*). R may also reflect religious commitments of agents. Finally, R can be viewed as compatibility with the principles or empirical procedures of one or any other theory. Each of the mentioned interpretations is bound with a selection of certain relation R defined on an appropriate set of states.

If A is an action in $\boldsymbol{A}$, then the set $Dom(A) := \{u \in W : (\exists w \in W)(u, w) \in A\}$ is called the *domain of A*. If $Dom(A) = W$ the action is called *serial*. A is *deterministic* if A is a function defined on $Dom(A)$.

Any pair $(u, w) \in A$ is called a possible *performance* of A. We shall iterchangeably use the notation: $(u, w) \in A$ and uAw. A similar notation applies to the relation R.

Any pair $(u, w) \in A$ such that also $(u, w) \in R$ called a *realizable performance* of A (in the sense of R).

According to the approach presented in Czelakowski (2015), it is assumed that actions, and not states of affairs, are deontologically loaded. Deontic operators are defined as unary operations on atomic actions. The values of deontic operators are subsets of the set of states. Accordingly, for any action system $\boldsymbol{M} = (W, R, \boldsymbol{A})$ and each action $A \in \boldsymbol{A}$ we define the following three propositions:

$\boldsymbol{P}A$ *A is permitted in the sense of R*,

$\boldsymbol{F}A$ *A is forbidden in the sense of R*,

$\boldsymbol{O}A$ *A is obligatory in the sense of R*,

all being subsets of W. Thus, $\boldsymbol{P}A$ is the set of all states of the system $\boldsymbol{M}$ at which the atomic action A is permitted. In a similar way, we read the remaining propositions.

Here are their definitions (they are borrowed from Czelakowski, 2015):

(1) $u \in \boldsymbol{P}A \Leftrightarrow_{df} (\exists w \in W)(uAw \text{ and } uRw)$,

(2) $u \in \boldsymbol{F}A \Leftrightarrow_{df} u \notin \boldsymbol{P}A$,

(3) $u \in \boldsymbol{O}A \Leftrightarrow_{df} u \in \boldsymbol{P}A \text{ and } (\forall w \in W)(uRw \Rightarrow uAw)$.

According to (1), for a given state $u \in W$, the fact that A is permitted at u means that the action A is performable at u (in the sense of R!) and, after performing it, some state w, characterized by the RHS of (1), is obtained. The meaning of (2) is simple: A is forbidden at u if and only if it is not permitted at u (2), in the logically equivalent form, expresses the so called *closure principle*, well known in jurisprudence: an action is permitted if and only if it is not forbidden. The implication from the left to the right is accepted in all deontic systems, i.e, if the action is permitted, it is not forbidden. The closure principle reverses this implication. According to (3), for a given state $u \in W$, the action A is *obligatory at u* with respect to R iff A is permitted at u in the sense of R and, moreover, every R-transition from u is effected by performing the action A at u (there is no way of "bypassing" the action A at the state u).

In other words, in order to leave the state u, one must perform A. A more thorough elucidation of this issue is presented in Czelakowski (2015). We call it the "only one exit" conception of obligation of action.

Note. The unary operation $\boldsymbol{P}$ is called the *weak* permission. The strong counterpart $\boldsymbol{P}_s$ of $\boldsymbol{P}$, the *strong permission*, is defined as follows:

$(1)_s$ $$u \in \boldsymbol{P}_s A \Leftrightarrow_{df} \quad (\forall w \in W)(uAw \Rightarrow uRw).$$

It directly follows from (1)–(3) that for any A,

(4) $$\boldsymbol{O}A \subseteq \boldsymbol{P}\,A \text{ and } \boldsymbol{F}A = W - \boldsymbol{P}\,A.$$

($\boldsymbol{F}A$ is thus the complement of $\boldsymbol{P}\,A$).

The first conjunct of (4), quantified over all actions A, is sometimes referred as Kant's principle (*Every obligatory action is permitted*). The second conjunct of (4) is a semantic rendition of the closure principle: *any action A is permitted if and only if it not forbidden*. Therefore, the above semantics, based on action systems, entails the closure principle. It should be noted that the closure principle may be annulled after a sutable modification of the definition of an action system — see Czelakowski (2015).

The above definitions imply that:

(*) $$\text{if } A \cap R = \emptyset, \text{ then } \boldsymbol{O}A = \boldsymbol{P}\,A = \emptyset \text{ and } \boldsymbol{F}A = W.$$

At this point, one may pose the following issue: in the deontology of action it is tempting to take the axiomatic course and simply declare at the outset that the formulas (4) are primitive relations that are axiomatically guaranteed for each action A separately. The (4) might be thus regarded as a natural axiomatic underpinning of such deontology. We claim, however, that from the sematic viewpoint such an approach disregards the internal structure of the system $\boldsymbol{M}$ and does not take into account interrelations which hold between the atomic actions of $\boldsymbol{M}$ and the relations R. We apprehend that it is a simplistic view. The main justification is that we want to retain the principle of compositionality. If one merely assumes (4), we therefore have a well-established meaning of the formulas of the form $P\alpha$, $F\alpha$ and $O\alpha$ in the spaces of states, where α is an action variable. But then the question arises: What meaning should be attached to variables α ranging over actions? If we agree that the meaning of each action variable is constituted by a binary relation over the space of states, such a solution inevitably leads to the action systems defined as above (here, the compositionality principle assumes that the meanings of the expressions $P\alpha$, $F\alpha$ and $O\alpha$ are functions of the meanings of action variables α).

In the presence of the closure principle, the propositions $\boldsymbol{O}A$ and $\boldsymbol{F}A$ may be treated as primitive. $\boldsymbol{P}A$ is then definable as the Boolean complement of $\boldsymbol{F}A$. We shall call

$$(\boldsymbol{O}A, \boldsymbol{F}A)$$

a *conjugate pair* of deontological propositions. The first element of such pairs define commandments and the other—imposes bans on each action A in the sense of the action system $\boldsymbol{M}$ (and the particular relation R adopted in $\boldsymbol{M}$). There is no conflic here because, in view of (4), $\boldsymbol{O}A \cap \boldsymbol{F}A$ is the empty proposition. Therefore in no state of the system, the action A is obligatory and forbidden.

If the closure principle is dropped, all three deontic propositions are primitive and not interdefinable. In this case one considers the triples

$$(\boldsymbol{O}A, \boldsymbol{P}A, \boldsymbol{F}A)$$

as a proper conjugate triple of deontological propositions. In what follows, the closure principle is assumed, because its acceptance considerably simplifies the description of conflicts of obligations.

The discourse on the deontology of actions carried out in this work assumes *classical logic*. In what follows we will be concerned with Boolean combinations of propositions $\boldsymbol{O}A$, $\boldsymbol{F}A$ with $\boldsymbol{P}A$ ranging over atomic actions of the system $\boldsymbol{M}$ and we freely apply the rules of classical logic. Accordingly, the notion of contradiction is viewed classically. In particular, as $\boldsymbol{O}A \cap \boldsymbol{F}A$ is empty, the set of propositions $\{\boldsymbol{O}A, \boldsymbol{F}A\}$ is inconsistent. In the deontology of actions, in the discussion of conflicting situations, the presence of inconsistences in some contexts is a rather natural state of affairs.

3. Conflicts of obligations

The present research has been to a large extent inspired by the work of Kulicki and Trypuz (2016). But the narrative of this research is entirely different. Firstly, we speak of conflicts of actions, and not of norms (the relationship between actions and norms is discussed e.g. in Czelakowski (2015). We do not tackle this issue here).

Secondly, in the discourse on the conflict of actions classical logic is not rejected. On the contrary, the constructs presented in this work constitute the semantics of an extension of classical logic enriched with unary deontic operations applicable to actions.

This section is concerned with a semantic exposition of conflicting obligations. The crucial issue consists in providing an accurate and adequate meaning of such conflicts. How to understand them? Two solutions of the problem are presented in this paper. Both are based on action systems as the basic semantic tool.

Merely simple conflicting situations are discussed here, i.e., binarny, two-dimensional conflicts of obligations. These are the situations involving an action such that reconcilliation of this action with these two obligations in a given state of affairs is not possible.

The source of conflict stems from the fact that obligations have origins in different orders e.g. in the moral and political ones, juridical and religious, social and concerning outlook, affections and social rules etc., as in the above examples. In the conflicting situations discussed here these sources are equally valid.

These orders may be hierarchical — some, from various reasons, are more important than the others. But the issue of hierachy of obligations is not discussed in the work.

The first approach to the conflict of obligations is carried out in terms of somewhat different action models as compared with those presented in the preceding section. In the simplest case, the models we consider are endowed with a *pair* R_1, R_2 of transition relations, and not with a single relation as in the action systems defined above. Each relation R_i separately determines the deontology of atomic actions of $\boldsymbol{A}$. Thus, the models which we consider take the form:

$$\boldsymbol{M} = (W, R_1, R_2, \boldsymbol{A}),$$

where W and $\boldsymbol{A}$ are defined as above. Equivalently, we may take two models $(W, R_1, \boldsymbol{A})$ and $(W, R_2, \boldsymbol{A})$ with the same set of states W and the same family of actions $\boldsymbol{A}$ but with different transition relations R_1 and R_2.

The simplest models of a conflict of obligations relating to atomic actions can be described as follows: there is given the system $\boldsymbol{M} = (W, R_1, R_2, A)$, where W is the space of states, A is a single atomic action on W (there are no other atomic actions), R_1 and R_2 are *two* different transition relations between states (they impose *two* different forms of obligations on the action A, which will be dealt with later. We shall adopt the above definitions (1)–(3), but separately for each transition relation R_i, $i = 1, 2$.

We define six propositions: $\boldsymbol{P}_i A$, $\boldsymbol{F}_i A$, and $\boldsymbol{O}_i A$ for $i = 1, 2$, all being subsets of W, in accordance with the general pattern provided by (1)–(3). They are read off as follows:

$\boldsymbol{P}_i A$ *A is permitted in the sense of* R_i,
$\boldsymbol{F}_i A$ *A is forbidden in the sense of* R_i,
$\boldsymbol{O}_i A$ *A is obligatory in the sense of* R_i

for $i = 1, 2$. Thus,

$(1)_i \qquad u \in \boldsymbol{P}_i A \Leftrightarrow_{df} \quad (\exists w \in W)(uAw \text{ and } uR_i w),$

$(2)_i \qquad u \in \boldsymbol{F}_i A \Leftrightarrow_{df} \quad u \notin \boldsymbol{P}_i A,$

$(3)_i \qquad u \in \boldsymbol{O}_i A \Leftrightarrow_{df} \quad u \in \boldsymbol{P}_i A \text{ and } (\forall w \in W)(uR_i w \Rightarrow uAw)$

for $i = 1, 2$.

It follows from $(1)_i$–$(3)_i$ that

$(4)_i \qquad \boldsymbol{O}_i A \subseteq \boldsymbol{P}_i A \text{ and } \boldsymbol{F}_i A = W - \boldsymbol{P}_i A$

for $i = 1, 2$.

It is also clear that $R_1 \subseteq R_2$ implies that $\boldsymbol{P}_1 A \subseteq \boldsymbol{P}_2 A$ and $\boldsymbol{F}_2 A \subseteq \boldsymbol{F}_1 A$.

The two relations R_1, R_2 inherent in the system $\boldsymbol{M}$ give rise to two conjugate pairs

$$(\boldsymbol{O}_1 A, \boldsymbol{F}_1 A) \text{ and } (\boldsymbol{O}_2 A, \boldsymbol{F}_2 A)$$

and to the first type of conflicts of obligations we shall examine in this section. An ingenuous understanding of conflicts of obligation is that the two propositions $\boldsymbol{O}_1 A$ and $\boldsymbol{O}_2 A$ are inconsistent. It is not the case. The conflicts stem from the inconsistency between the obligation $\boldsymbol{O}_1 A$ and the prohibition $\boldsymbol{F}_2 A$, or symmetrically, between the obligation $\boldsymbol{O}_2 A$ and the prohibition $\boldsymbol{F}_1 A$.

To give an instantiation of the above general definition, let us take a look at the following situation taken from everyday academic life (it has indeed happened). Professor X is a member of a Senate committee in his university and, on the other hand, he is a promoter of a number of master theses. The defence of one thesis has been already scheduled by the Dean on a definite day and hour, say t_0. But the day before the term of the defence, X receives an unexpected message from the Vice-President informing that the first inaugurating meeting of the committee is scheduled at the same time, that is, at t_0 (the Vice-President is apparently unaware of the other commitment of X at t_0). What should X do in this state of affairs?

To simplify matters, states are identified with with relevant situations reflected in the work schedule of X: the dates and the themes of his lectures, the dates and the themes of seminars, meetings of the committee etc. Thus each state — or rather, situation — is simply a planned event that will take place at a definite day. Accordingly, situations may be are modeled as sequences of the form (a, b, x, t), where a specifies the type of the event (lecture, seminar, meeting of the scientific council etc.), b specifies the title or the event or provides its short description (e.g. lecture on orthonormal bases in Hilberts spaces, etc.), x represents a space location and t time. According to the typology given in Czelakowski (2015), the factors *a* and *b* jointly make up the state *u* of the situation in question while *x* and *t* represent factors defining the situational envelope of the state *u*. For example, the following scheme provides a sequence of consecutive Monday and Tuesday states:

s_1 *Lectures on classical logic*; topic: *tautologies*; audience: *freshmen*; time: *Monday*, 10 a.m.–12 p.m.; place: *Room* 4;

s_2 *Lectures on topology*; topic: *products of topological spaces*; audience: *sophomores*, time: *Monday*, 12 p.m.–2 p.m.; place: *Room* 3,

s_3 *Seminar on functional analysis*; topic: *orthonormal bases in Hilbert spaces*; audience: *graduate students*; time: *Tuesday*, 10 a.m.–12 p.m.; place: *Room* 2,

s_4 *Office hour*; topic: *ongoing issues*; audience: *individual students*; time: *Tuesday*, 12 p.m.–1 p.m.; place: *X's office*, etc.

The other states, for the remaining days of the week, are defined similarly.[2] The states need not be fully predetermined, some of their constituents are flexible and even apriori unknown as e.g. the date of the first meeting of the commission. The above scheme is therefore fully defined *ex post*. The academic activity of X is reflected by the (compound) action *A* that provides consecutive transitions between such defined states. Of course, these transitions respect time succession.

From the viewpoint of the problem we have signalled, two transition relations R_1 and R_2 between states are isolated. The relation R_1 reflects the involvement of X as the promoter of master theses. Thus R_1 determines the time table of his seminar meetings with senior students, the way he organizes these seminars, his role as an advisor in the process of writing the theses he is responsible for etc. R_1 directly leads from a state *u* to the state *w* being the time sucessor of *u*, where *w* refers to the X's commitments as the advisor of master theses. In turn, R_2 defines the way the Senate committee proceeds and the role of X as a member of it. Thus R_2 directly leads from a state *u* to the state *w* being the time sucessor of *u*, where *w* refers to the X's commitments as a member of the Senate committee. In the both cases, R_1 and R_2 are binary relations between (some) states of the tight academic itinerary of X. We therefore

2 The above description of states is incomplete. It should be supplemented with the results of the previously undertaken action of X and a short description of the action following the previous one. Thus e.g. w_3 should inform that after the talk on axioms systems of topological spaces, the Tuesday meeting of the seminar is on normed spaces.

have a set W of states endowed with one compound action A and two transition relations R_1 and R_2.

The above collision of X's obligations at the state u directly preceding the time moment t_0 is of random character as it often happens in everyday life. It is the result of the Vice-president's arbitrary decision not consulted earlier with X (and probably with other members of committee). This decision changes X's preliminary itinerary by adding a new state with time parameter t_0, viz. the first meeting of the committee. This decision extends the set of states in the action system according to which X acts as a professor and it results in a collision of X's obligations. To solve the dillema: cancel the defence of the master thesis at t_0 or to go to the meeting of the commission scheduled at t_0 depends on X's preferences and his assessement of the arising situation. But a decision must be made.

This and the example with a Jehova's Witness show that the above simple relational formalism cannot adequately render situational aspects of obligations, especially when agency or temporal components of action are taken into account. E.g. religious obligations and commitmens are inherent components of the whole life of a believer. On the other hand, other obligations may be regarded as contingent or haphazzard from the perspective of an individual e.g. when a blood transfusion is necessary. This obligation is strictly linked with an occurrence of a definite event in the life of an agent, viz. a car accident. The deepened discussion on the conflict of obligations should not neglect the situational envelope of action. The present formalism reduces the notion of a situation to that of a state of the action system.

Yet another formal analysis of the above conflicting situation can be made by keeping only one transition relation R between states (in their time succession) and isolating two (compound) actions, being sub-actions of the action A. Thus X is the agent of two different (and compound actions); the first one, say B, characterizes the activity of him as the promoter of master theses, the other action C is his activity as a member of the Senate committee. Thus X has twofold obligations: 1. concerning the action B (defences of master theses), 2. concerning the action C (his participation in the meetings of the Senate committee). Then one may speak of the conflict of obligations with respect to *two* different actions B and C in a given situation. The situation presented in the above example has been modelled differently as a collision of *one* action, viz., A, with respect to *two* different types of obligations. Basically, the two approaches are formally equivalent: the first model can be transformed into the other and vice versa.

The scheme of conflicting obligations we shall first discuss is modelled according to the second option, that is, as a collision of *two* different obligations of *one* action in a state. Accordingly, a set of states W and an atomic action A on W are isolated. Instead of an atomic action A, a compound action $\mathbf{A}$ may be taken at the outset; but then we work with the resultant relation of $\mathbf{A}$. Two transtion relations on the set W are distinguished; each relation reflects a *different* character of the agent's deontological commitments.

Accordingly, let $\boldsymbol{M} = (W, R_1, R_2, \{A\})$ be an action system, defined as above, in which only one atomic action A is singled out.

We shall first present two models of conflict situations: the local and the global ones.

Local conflicts take place in particular states of the system.

Let u be a state of W. A conflict situation arises in the state $u \in W$ if it is the case that:

(5) $$u \in \boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{F}_2 A \text{ or } u \in \boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A,$$

which means that A is obligatory at u in the sense of the first obligation $\boldsymbol{O}_1$ and forbidden in the sense of $\boldsymbol{F}_2$ or, symmetrically, A is obligatory at u in the sense of the second obligation $\boldsymbol{O}_2$ and forbidden in the sense of $\boldsymbol{F}_1$.

The local conflict occurs in some state if either the proposition $\boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{F}_2 A$ or $\boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A$ is consistent.

If (5) holds for u, then it is easy to see that the situation that $u \in \boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{O}_2 A$ is excluded, i.e., it is *not* the case that A is obligatory at u in the sense of *both* obligations. Indeed, let us suppose $u \in \boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{O}_2 A$ holds for some u that satisfies (5). Assume first that $u \in \boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{F}_2 A$. Hence, as $u \notin \boldsymbol{O}_2 A$, $(4)_2$ gives that $u \in \boldsymbol{P}_2 A$. On the other hand, $u \in \boldsymbol{F}_2 A$. Hence, $u \notin \boldsymbol{P}_2 A$. We similarly argue when $u \in \boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A$. In both cases we arrive at a contradiction. Such situations are presented in the above example. Thus merely the *consistency* of the propositions $\boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A$ or $\boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A$ yields a local conflict between obligation and prohibition to perform A at any state u in $\boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{F}_2 A$ or $u \in \boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A$. There are no direct conflict between the obligations $\boldsymbol{O}_1 A$ and $\boldsymbol{O}_2 A$ at u.

One may also define a weaker than (5) local conflicting situation, viz.

$(5)_P$ $$u \in \boldsymbol{P}_1 A \cap \boldsymbol{F}_2 A \text{ or } u \in \boldsymbol{P}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A.$$

which means that A is permitted at u in the sense of the first permission $\boldsymbol{P}_1$ and forbidden in the sense of $\boldsymbol{F}_2$ or, symmetrically, A is permitted at u in the sense of $\boldsymbol{P}_2$ and forbidden in the sense of $\boldsymbol{F}_1$.

We define yet another form of conflict of obligations, the so-called *global* conflicting situation, taking the form of the disjunction of the following inclusions:

(6) $\boldsymbol{O}_1 A \subseteq \boldsymbol{F}_2 A$ or $\boldsymbol{O}_2 A \subseteq \boldsymbol{F}_1 A$.

(6) says that for *every* state u at which A is obligatory in the sense of $\boldsymbol{O}_1$, A is forbidden (at u) in the sense of $\boldsymbol{F}_2$. or, by way of symmetry, $\boldsymbol{O}_2 A \subseteq \boldsymbol{F}_1 A$.

If the global conflict (6) holds, the proposition $\boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{O}_2 A$ is empty. Indeed, in virtue of (6), $\boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{O}_2 A \subseteq \boldsymbol{F}_2 A \cap \boldsymbol{P}_2 A = \emptyset$. As in the case of (5), the fact $\boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{O}_2 A = \emptyset$ does not reflect a direct conflict of obligations; this equality merely says that in no state can the two obligations $\boldsymbol{O}_1 A$ and $\boldsymbol{O}_2 A$ occur. The equality $\boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{O}_2 A = \emptyset$ is logically weaker than (6). By contrast to (6), this equality does not reflect in itself a conflict of obligations. The existence of the global conflict is expreesed by (6).

(6) is equivalent to

(6)* $\{\boldsymbol{O}_1 A, \boldsymbol{P}_2 A\}$ or $\{\boldsymbol{O}_2 A, \boldsymbol{P}_1 A\}$ is inconsistent.

We may therefore adopt (6)* as the definition of the global conflict of obligations as well.

We also do not have a local conflict of obligations at u when $u \in \boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{O}_2 A$. The conflict appears merely when (5) occurs.

We thus see that the conflict between obligations and prohibitions in the above sense can be handled in terms of classical logic; The existence of the local conflict is expressed as the *consistency* of deontological propositions $\boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{F}_2 A$ or $\boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A$.

4. Obligations to abstain from acting

In this section we shall analyze yet another type of conflict of obligations. We have thus far presented a certain formalism whose essential feature is the presence of *two* obligations $\boldsymbol{O}_1 A$, $\boldsymbol{O}_2 A$ and derivatives of two prohibitions $\boldsymbol{F}_1 A$ and $\boldsymbol{F}_2 A$ of an action A. The collision of obligations is referred to either as *local*, that is, when it is relativised to a certain state (or states), or the *global* one, viewed as a contradiction of two propositions $\boldsymbol{O}_1 A$ and $\boldsymbol{F}_2 A$ (or also on the basis of symmetry, as a contradiction between $\boldsymbol{O}_2 A$ or $\boldsymbol{F}_1 A$). The discussion of the above problem was carried out in terms of actions systems endowed with two transition relations between states.

A conflict of obligations which concern a definite action A can also be defined as the presence of two other obligations: one—ordering the execution of this action and the other—ordering *not* to carry out A. This is the issue we shall discuss here. Here the basic sematic tool is the notion of an action system $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{W}, R, \boldsymbol{A})$ endowed with only one transition relation between ststes. The burden of the solution then rests on the explanation of refraining from action.

The issue of refrainig from action is widely debated in the literature—see e.g. Gabbay et al. (2013); Hilpinen (1981); Talja (1985); Trypuz (2008), and von Wright (1963). There is a variety of delicate definitional problems which seem to have not been satisfactorily resolved. The first question is whether abstainig from performing an action is an action too. In some approaches, it is argued that refraining from an action A is also an action and it is a complement of A in a sense. In other approaches, the notion of an agent is involved and the issue of refraining from an action is translated as refraining of the *agent* from acting. We shall opt here for the first approach—refraining from an (atomic or compound) action A is an atomic action defined in a special way; but it is not the Boolean complement of the action in question. Refraining from A will be marked as

$$A^{ref}.$$

The action A^{ref} is defined below; it need not belong to the set $\boldsymbol{A}$ of primitive atomic action of the action system $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{W}, R, \boldsymbol{A})$ in question.

We shall treat the phrases: “refraining from action”, “omitting an action”, “forbearing from action”, “abstaining from action” etc. as synonymous. In the paper they are treated interchangeably.

From the mathematical viewpoint, refraining from action is a unary operator ^{ref} defined on the set of atomic actions $\boldsymbol{A}$ of $\boldsymbol{M}$ which to each action $A \in \boldsymbol{A}$ assigns the action A^{ref} defined on the set of states of $\boldsymbol{M}$.

There arises the natural question then: Is the *obligation not to execute the action A* is tantamount to the fact that the action itself is prohibited? Another question appears tied to the former: Can the prohibition of carrying out this action be defined as a commitment of not carrying this action out? The positive solution to this problem could lead to yet another definition of collision of obligations, that is as a contradiction between the obligatory proposition $\boldsymbol{O}A$ and the obligatory proposition $\boldsymbol{O}A^{ref}$, where A^{ref} is the refraining of A. $\boldsymbol{O}A^{ref}$ orders to refrain from execution of A (in the sense of $\boldsymbol{O}$).

To carry out the discussion on the deontology of refraing from action, in the next step we shall apply the operators $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{F}$, and $\boldsymbol{O}$ to the action A^{ref} according to the general scheme provided by conditions (1)–(3) above. In other words, we shall define the propositions $\boldsymbol{P}A^{ref}$, $\boldsymbol{F}A^{ref}$ and $\boldsymbol{O}A^{ref}$.

As mentioned above, the first step towards solving the problem is providing the definition of action A^{ref} of not doing A. The action A^{ref} cannot be entirely separated from the properties of A. We propose the following solution.

Let A be an atomic action on the set of states W. Hence $A \subseteq W \times W$. For each state $u \in Dom(A)$, any pair $(u, w) \in A$ is called a *possible performance* of A at u. We then define:

(7) $$A^{ref} := \{(u, u) : u \in Dom(A)\}.$$

Thus $uA^{ref}w$ if and only if $u = w$ and $u \in Dom(A)$.

The domain of A^{ref} is equal to the domain of $Dom(A)$. Thus refraining from doing A is possible only in the states being reflexive points of A.

The meaning of A^{ref} is simple—if after performing A the system enters a state u, it stops in u. A^{ref} is called the *refraction* of A.

The definition of A^{ref} does not depend on the transition relation R in the action system but merely on A. From the perspective of dynamic logic, the action A^{ref} may be interpreted as an implementation of the command *Halt A*. But the adopted here formalism avoids the term *command*; the narration is uniformly developed in terms of actions and the ways they are performed in definite states.

The refraining operator ^{ref} is monotone and idempotent, i.e., for any actions A and B, if $A \subseteq B$, then $A^{ref} \subseteq B^{ref}$ and $(A^{ref})^{ref} = A^{ref}$.

A state $u \in W$ is *terminal* for A if there is no state w such that uAw (though it may be that $(u, w) \in R$). Thus refraining from doing A makes no sense in terminal states of A, because such states do not belong to the domain of A though indeed A definitely stops in such terminal states.

When the refraining from doing A is actually realizable?

We adopt the following simplifying assumption that says that abstaining from doing A is acccomplished at any state $u \in Dom(A^{ref})$ such that $u\,R\,u$. Thus refraining from doing A is realizable only in the states $u \in Dom(A^{ref})$ that are reflexive points of R.

This is a strong assumption, because from the agent's perspective it says that the agent is able to stop performing A at any state $u \in Dom(A)$ being a reflexive point of R. Thus he has some control of the course of action A.

The above assumption excludes some probabilistic action system in which action take the form of stochastic processes are beyond agents' will and abilities.

Shortly, refraining from A is performable in all states u at which A itself is performable and which are reflexive ponts of R (*the policeman refrains from shooting the fleeing youth* although he can do that, see Talja, 1985, p. 241).

A^{ref} is a subset of the diagonal of $W \times W$. A^{ref} is also a certain atomic action on W. A^{ref} is called the *refraction* of A. Thus abstaining from doing of A is meaningful only in reflexive points of R that belong to $Dom(R)$. If R is deterministic without fixed points, then A cannot be abstained!

Shortly, A^{ref} is performable at a state u if and only if $(u, u) \in A^{ref}$ and $(u, u) \in R$, i.e., the refraining from A is accomplished only in the states u such that $u \in Dom(A)$ and $(u, u) \in R$.

As mentioned, from the formal viewpoint, refraining is an operator defined on the family of atomic action of a system $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{W}, R, \boldsymbol{A})$ that assigns to each action A a binary relation A^{ref}, not necessarily belonging to $\boldsymbol{A}$. One may consider action systems in which the family $\boldsymbol{A}$ is closed with respect to the refraining operator. It is easy to see that this operator is idempotent.

Let us assume that $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{W}, R, \boldsymbol{A})$ is an action system (with only one transition relation R) and $A \in \boldsymbol{A}$ is an arbitrary but fixed atomic action. We define the action A^{ref} as above and adjoin it to the set $\boldsymbol{A}$ of atomic actions. We then apply the definition of the operators $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{F}$, and $\boldsymbol{O}$ to the atomic action A^{ref} according to the above formulas (1), (2) and (3). Thus:

$(1)^{ref}$ $$u \in \boldsymbol{P}A^{ref} \Leftrightarrow_{df} u\, A^{ref} u \text{ and } uRu.$$

$(1)^{ref}$ is equivalent to

$$u \in \boldsymbol{P}A^{ref} \Leftrightarrow u \in Dom(A) \text{ and } uRu.$$

$u \in \boldsymbol{P}A^{ref}$ is read: *Refraining from A is permitted at u.*

$(2)^{ref}$ $$u \in \boldsymbol{F}A^{ref} \Leftrightarrow_{df} u \notin \boldsymbol{P}A^{ref}.$$

$u \in \boldsymbol{F}A^{ref}$ is read: *Refraining from A is forbidden at u.*

Thus

$$u \in \boldsymbol{F}A^{ref} \Leftrightarrow (u \in Dom(A) \Rightarrow \neg\, (uRu)).$$

But the question arises when refraining from A is obligatory.

We say that a state u is a *totally reflexive point* of R if the following condition holds:

$$uRu \wedge (\forall w \in W)(uR\, w \Rightarrow u = w).$$

Thus u is a *totally reflexive point of R* if u is a reflexive point of R and there are no points w other than u such that uRw.

Reflexive points of A are sometimes called *fixed-points* of R and totally reflexive points are called *strong fixed points* of R.

We adopt the following solution being the counterpart of the formula (3) for A^{ref}:

$(3)^{ref}$ $\quad u \in \boldsymbol{O}A^{ref} \Leftrightarrow_{df} u \in \boldsymbol{P}A^{ref} \wedge (\forall w \in W)(uRw \Rightarrow u\, A^{ref} w)$.

$u \in \boldsymbol{O}A^{ref}$ is read: *Refraining from A is obligatory at u.*

$u \in \boldsymbol{O}A^{ref}$ trivially implies $u \in \boldsymbol{P}A^{ref}$. Thus, if refraining from A is obligatory, then it is permitted.

Theorem 1: *For any state u*,

$$u \in \boldsymbol{O}A^{ref} \Leftrightarrow u \in Dom(A) \textit{ and } u \textit{ is a strong reflexive point of } R.$$

Proof: The proof of the theorem is an easy exercise in the calculus of quantifiers.

In view of $(3)^{ref}$, $(1)^{ref}$, and the definition of A^{ref} the following conditions are equivalent:

$u \in \boldsymbol{O}A^{ref}$,

$u \in \boldsymbol{P}A^{ref} \wedge (\forall w \in W)(uRw \Rightarrow u\, A^{ref} w)$,

$u \in \boldsymbol{P}A^{ref} \wedge (\forall w \in W)(uRw \Rightarrow u = w \wedge u \in Dom(A))$,

$u \in Dom(A) \wedge uRu \wedge (\forall w \in W)(uRw \Rightarrow u = w \wedge u \in Dom(A))$,

$u \in Dom(A) \wedge uRu \wedge (\forall w \in W)(\neg\, uRw \vee (u = w \wedge u \in Dom(A)))$,

$u \in Dom(A) \wedge uRu \wedge (\forall w \in W)[(\neg\, uRw \vee u = w) \wedge$
$(\neg\, uRw \vee u \in Dom(A))]$,

$u \in Dom(A) \wedge uRu \wedge (\forall w \in W)(\neg\, uRw \vee u = w) \wedge$
$(\forall w \in W)\,(\neg\, uRw \vee u \in Dom(A))$,

$u \in Dom(A) \wedge uRu \wedge (\forall w \in W)(\neg\, uRw \vee u = w)) \wedge$
$([(\forall w \in W)\, \neg\, uRw] \vee u \in Dom(A))$,

$uRu \wedge (\forall w \in W)(\neg\, uRw \vee u = w)) \wedge u \in Dom(A) \wedge$
$([(\forall w \in W)\, \neg\, uRw] \vee u \in Dom(A))$,

$uRu \wedge (\forall w \in W)(\neg\, uRw \vee u = w)) \wedge u \in Dom(A)$,

$uRu \wedge (\forall w \in W)(uRw \rightarrow u = w)) \wedge u \in Dom(A)$,

$u \in Dom(A) \wedge u$ is a strong reflexive point of R. ■

Thus $u \in \boldsymbol{O}A^{ref}$ means

$u \in Dom(A)$ and u is a strong reflexive point of R.

Intuitively, $u \in \boldsymbol{O}A^{ref}$ says that the refraining of A at u is permitted but there are no ways of leaving the state u. The action A definitely stops at u and therefore refraining of A at u is compulsory.

The crucial issue we shall analyse in this section is the inclusion $\boldsymbol{O}A^{ref} \subseteq \boldsymbol{F}A$, that is, the situation when in any state u the obligation to refrain from doing A (in the sense of $(3)^{ref}$) implies that A is forbidden. When does this inclusion hold? To carry out the discussion in a more detail, we shall need to have the above formulas in more developed forms.

Each totally reflexive point u of R is intuitively viewed as a state of "life imprisonment" of the system $\boldsymbol{M}$—once the system enters u, it stays there forever without possibility of leaving it. In turn, terminal states are treated as dead states of the system—once $\boldsymbol{M}$ eventually reaches such a state, the system ceases to exist.

Theorem 2: *Let $\boldsymbol{M} = (W, R, \boldsymbol{A})$ be an action system. Let us assume that A is an action in $\boldsymbol{A}$ such that every totally reflexive point of R is not a reflexive point of A. Then $\boldsymbol{O}A^{ref} \subseteq \boldsymbol{F}A$.*

The theorem states that under the assumption that the set of totally reflexive points of R is disjoint with the set of reflexive points of A, the action A is forbidden at every state u at which refraining from doing A is compulsory.

Proof: Assume $u \in \boldsymbol{O}A^{ref}$. Hence, by Theorem 1, u is a totally reflexive point of R and $u \in Dom(A)$. Suppose *a contrario* that $u \notin \boldsymbol{F}A$. Then, for some state w it is the case that uRw and uAw. As u is totally reflexive point of R, we then have that $w = u$. Hence uAu. This contradicts the assumption.

5. Antigone's dilemma

In this section, we tackle the above type of conflicts of obligations by giving an example borrowed from an ancient play Thus, this collision of obligations arises in situations when one obligation orders performing an action while the other orders refraining from doing it. This type of conflict will be semantically modelled by action sytems endowed with more than one transition relation between states.

In the simplest case, let us consider a system $\boldsymbol{M} = (W, R_1, R_2, A)$ with *two* transition relations R_1, R_2 and one action A. We augment the system with the action A^{ref} defined as in (7) and apply the above definitions of the deontic operators. The conflict of obligations we discuss here is expressed by the inclusion

(8) $$\boldsymbol{O}_1 A \subseteq \boldsymbol{O}_2 A^{ref}.$$

Here we have a conflict of obligations in the explicit form in all states u: if the first obligation

$\boldsymbol{O}_1 A$ orders performing A at u, the other obligation $\boldsymbol{O}_2 A^{ref}$ orders not doing A at u, thus cancelling the former.

To obtain the above inclusion, we have to conjoin the relations R_1 and R_2 in the system a certain way. We shall now formulate a sufficient condition imposed on action systems yielding (8) in the general case. The following theorem provides a partial solution.

Theorem 3: *Let $\boldsymbol{M}$ be as above. Suppose that the following condition is satisfied for any state $u \in W$: if u is not a terminal state of R_1, then u is a totally reflexive point of R_2. Then $\boldsymbol{O}_1 A \subseteq \boldsymbol{O}_2 A^{ref}$.*

Proof: Suppose $u \in \boldsymbol{O}_1 A$. Hence uAv and uR_1v for some v and $(\forall w)(u R_1 w \Rightarrow uAw)$. As uR_1v holds, u is not a terminal state of R_1. The assumption of the theorem then implies that u is a totally reflexive point of R_2. As also uAv holds, Theorem 1 gives that $u \in \boldsymbol{O}_2 A^{ref}$. This proves that $\boldsymbol{O}_1 A \subseteq \boldsymbol{O}_2 A^{ref}$.

Inclusion (8) represents the global framing of the above conflict (in all possible states). But we may also speak of *local* dimension of the conflict, revealed in particular states of the system. Accordingly, the conflict of obligations $\boldsymbol{O}_1 A$ and $\boldsymbol{O}_2 A^{ref}$ occurs in a state u if it is the case that $u \in \boldsymbol{O}_1 A \cap \boldsymbol{O}_2 A^{ref}$.

To illustrate the above issues, we shall present a moral dilemma from Sophocles' *Antigone*. Antigone's example is examined in Kulicki and Trypuz (2016) but here it is outlined from a different perspective.

Let us first quote the following passage from the article:

> Creon, as the new ruler of Thebes, has decided that Polyneices will be in public shame and his dead body will not be sanctified by holy rites, but will lie unburied on the battlefield. Polyneices' sister Antigone believes that she should bury his body according to universal laws given by gods. Thus, whatever she does, she is in conflict with one of the directives that she should comply with—as a subject to Creon or as a subject to gods. [...] Antigone has two options: bury her brother or not. Obviously there is no other possibility. One can look at them at different levels referring to the various intentions or descriptions under which they are carried out [...]. At the basic level of crude behavior (bodily movements) burying Polyneices is an 'elementary act' done with a basic intention whose content is free from the social context of the situation. The other option is not as simple to interpret at this level but, regardless of any possible and, to some extent

> justified, criticism, it can be understood as carrying out any other action. [...] We certainly must look at Antigone's possible acts within their social and normative context. Then burying Polyneices is no longer elementary. It carries all social saturation. From the point of view of the tragedy it is important that burying Polyneices is in defiance of Creon's edict and in accordance with divine law. On the other hand any behavior different from that is in accordance with Creon's edict and in defiance of divine law. (Kulicki and Trypuz, 2016)

According to Wikipedia (n.d.), *Antigone* deals with three main questions:

1. Whether Polyneices ought to be given burial rituals;

2. Whether someone who buried him in defiance of state ought to be punished;

3. Whether Creon's actions are just or thoughtless.

Burying Polyneices' body is an obligatory action, irrespective of the circumstances in which he lost his life, because burying the deads is generally obligatory according to the universal laws given by gods. We mark this as the proposition $\boldsymbol{O}_1 A$, where A is "Burying Polyneices' body" and $\boldsymbol{O}_1$ is the above divine coercion. Let us mark by w_1 the particular state of affairs in which Polyneices' body lies unburied on the battlefield. The space of states W consists of two elements: w_1 and w_2, where w_2 represents the state in which Polyneices' body is already buried:

$$W = \{w_1, w_2\}.$$

A is "Burying Polyneices' body." Here A consists of only one ordered pair (w_1, w_2), i.e.,

$$A = \{(w_1, w_2)\}.$$

The action A leads from w_1 to w_2. There are however two transition relations R_1 and R_2 between states. R_1 consists of one pair (w_1, w_2). Hence and $A = R_1$. The relation R_1 represents the universal divine law ordering burying dead. w_2 is a terminal state in the sense of R_1. Thus R_1 says that burying Polyneices' body is "performable" at w_1. After doing that Polyneices' body" passes to the terminal state w_2.

In turn, R_2 represents Kreon's edict forbiding burying Polyneices' body as the body of a traitor. Here the transition relation R_2 consists of only one pair (w_1, w_1). This means that Polyneices' dead body will always remain in the state w_1. His corpse will never be buried—the state w_1 is not terminal in the sense of R_2 (and in the sense of R_1).

Thus:

$$R_1 = \{(w_1, w_2)\} \text{ and } R_2 = \{(w_1, w_1)\}.$$

The definitions $(1)_1$–$(3)_1$ and $(1)_2$–$(3)_2$ yield that

(9) $\boldsymbol{P}_1 A = \{w_1\}$, $\boldsymbol{F}_1 A = \{w_2\}$, $\boldsymbol{O}_1 A = \{w_1\}$

(10) $\boldsymbol{P}_2 A = \emptyset$ $\boldsymbol{F}_2 A = \{w_1, w_2\}$, $\boldsymbol{O}_2 A = \emptyset$.

Thus according to the above definitions, A is neither permitted ($\boldsymbol{P}_2 A = \emptyset$) nor obligatory in the sense of R_2 ($\boldsymbol{O}_2 A = \emptyset$); A is forbidden in all states ($\boldsymbol{F}_2 A = \{w_1, w_2\}$). In turn, we have that $w_1 \in \boldsymbol{O}_1 A$, i.e. A is obligatory at w_1 in the sense of the transition relation R_1 associated with the definition of $\boldsymbol{O}_1$. But also $w_1 \in \boldsymbol{F}_2 A$. Consequently, $w_1 \in \boldsymbol{O}_1 A \in \boldsymbol{F}_2 A$. In other words, burying Polyneices' body is obligatory according to the divine law and it is forbidded by Creon's edict. This is an instance of the general situation encapsulated by (5).

But what about the action of refraing from burying Polyneices' body? According to the above conventions, the action of refraining from doing A is marked by A^{ref}. In virtue of (7) A^{ref} consists of only one ordered pair (w_1, w_1), that is $A^{ref} = \{(w_1, w_1)\}$. Thus $A^{ref} = R_2$. We then have:

(11) $\boldsymbol{P}_1 A^{ref} = \emptyset$, $\boldsymbol{F}_1 A^{ref} = \{w_1, w_2\}$, $\boldsymbol{O}_1 A^{ref} = \emptyset$

(12) $\boldsymbol{P}_2 A^{ref} = \{w_1\}$, $\boldsymbol{F}_2 A^{ref} = \{w_2\}$, $\boldsymbol{O}_2 A^{ref} = \{w_1\}$.

It follows from the above equations that $w_1 \cap \boldsymbol{O}_2 A^{ref}$ Ç $\boldsymbol{F}_1 A^{ref}$, that is, it is *obligatory not to bury* Polyneices' body (by virtue of Creon's edict) and it if *forbidden not to burry* Polyneices' body (according to holy rites) at w_1. But (9) and (12) also give that

$$\boldsymbol{O}_1 A = \{w_1\} = \boldsymbol{O}_2 A^{ref}.$$

Thus the obligation $\boldsymbol{O}_1 A$ for doing A is tantamont to the obligation $\boldsymbol{O}_2 A^{ref}$ for not doing A. This conflict is thus an instantiation of the general scheme expressed by the inclusion (8).

But the question remains: what should Antigone do? The two obligations imposed on her order performing the action A as well performing A^{ref} at w_1. These actions cannot be reconciled. As we know, Antigone buries Polyneices' body. She defies Creon's decree despite the consequences she may face, in order to honor her deceased brother.

But the question remains: what should Antigone do? The two obligations imposed on her order performing the action A as well as of A^{ref} at w_1. These actions cannot be reconciled. As we know, Antigone buries Polyneices' body. She defies Creon's decree despite the consequences she may face, in order to honor her deceased brother.

We may look upon this conflict from a wider perspective. The situation of the hero (the agent) of being in a jam at the states in which he/she is not allowed to perform an action of vital importance to him/her (here: burying Polyneices' body by Antigone) gives rise to his further dramatic actions and choices. They often lead to the annihilation of the so entangled agent—his tragic death is the result. As he/she is unable to settle the conflict, he/she commits a suicide or is killed and leaves the stage. The literature is abound in such tragic plots. In the play, Creon decides to bury Antigone alive in a cave (see Wikipedia, n.d.).

6. Final remarks

1. Obligations are rooted in various frameworks: moral, legal, social etc. In the ordinary parlance obligations are defined as derivatives of courses of actions in which the agent of an action is legally or morally bound. The above narration abstracts from the presence of agents and other components of the situational envelope of actions-obligations are directly linked with actions.

The cases of possible conflicting obligations e.g. in legal codes, are solved by imposing preferences on various types of norms and documents that involve actions and their agents. E.g. the constitution establishes the fundamental principles or precedents that constitute the legal basis of a polity, organization or other types of entity. Not dwelling into details, in all modern states the constitution and the obligations it bears have supremacy over ordinary statutory law.

In the presented, simplified framework, the arosen difficulties may be partially resolved by defininig a hierarchy of obligations within action systems. In the simplest case there two transition relations R_1 and R_2 on the set of states W. We write $R_1 < R_2$ to indicate that R_2 is *superior* over R_1 ($<$ need not be the inclusion between binary relations).

If A is an atomic action and $\boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A \neq \emptyset$, where $\boldsymbol{O}_2 A$ is the obligation in the sense of R_2 and $\boldsymbol{F}_1 A$ is the prohibition in the sense of R_1, then in virtue of $R_1 < R_2$, it is postulated that in every state $u \in \boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A$ the prohibition $\boldsymbol{F}_1 A$ becomes annuled. Therefore A is obligatory in the sense of the superior relation R_2 in every state $u \in \boldsymbol{O}_2 A \cap \boldsymbol{F}_1 A$.

This is an instance of the pragmatic rules of deontic superiority driven by the the preference relation $\leq$. The logical aspects of these pragmatic meta norms are not discussed here.

2. In dynamic logic **DL** there are two syntactic categories: the category of sentences and the category of programs. The recursive definitions show how the members of the two categories are generated. The meanings of atomic program letters are identified with binary relations on sets of states. Therefore such atomic programs may be identified with atomic actions.

DL is an extended version of modal logic—the syntax of **DL** is endowed with modal operators for each program letter. E.g. if $\boldsymbol{a}$ is an atomic program (= atomic action), the meaning of $[\boldsymbol{a}]p$ is that after performing action $\boldsymbol{a}$ it necessarily that p hold and the meaning of $\langle \boldsymbol{a} \rangle p$ is that after performing action $\boldsymbol{a}$ it is possible that p holds (p is a propositional variable). But compound programs are not identified with atomic actions (the relationship between programs and compound actions is discussed in Czelakowski, 2015).

In **DL** there is a constant action **0** or **BLOCK**, which is interpreted as the action which does nothing and does not terminate. Axiom $[\mathbf{0}]p$ of **DL** makes the empty promise that when **0** terminates, p will hold, even if p represents false proposition.

The meanings of deontic operators on atomic actions, defined as above, are not identified with the meanings of modal operators on atomic program letters in the sense of **DL**. There are different entities. The models of **DL** do not assume transition relations R between states. There is no direct link between **DL** and deontic logic.

The issues raised in this work can be even better articulated if one incorporates some elements belonging to the situational envelope of action systems (the latter notion is defined and thoroughly discussed in Czelakowski, 2015). We mean the agents operating the actions of $\boldsymbol{M} = (W, R, \boldsymbol{A})$. The resulting situations from the envelope are ordered pairs $s = (u, a)$, where u is a state from W and a is an agent.

3. One may argue that the presented image of deontic logic is, in fact, a version of modal logic. Obligation corresponds to necessity and permision to modal possibility. But there is one essential difference—the deontic unary operations are directly applied to *actions* and not to propositions, as it is in the case of modal logic.

4. Yet another issue that has to be resolved concerns obligations of compound actions. From the viewpoint of Czelakowski (2015), compound actions over an action system $\boldsymbol{M}$ are defined as sets whose elements are finite sequences of atomic actions of $\boldsymbol{M}$. Each compound action may be therefore regarded as a formal language over the alphabet whose symbols are atomic actions of the system $\boldsymbol{M}$. The crucial issue to

be resolved is: *What is the meaning that can be attached to the sentence that a compound action is obligatory in some state of affairs u*? This problem is not tackled in this report. Some preliminary remarks on it are presented in Czelakowski (2015). But there are still many questions left concerning purely definitional aspects of the problem.

References

Czelakowski, J. (2015). *Freedom and Enforcement in Action: Elements of Formal Action Theory*. Berlin: Springer.

Gabbay, D., Horty, J., Parent, X., van der Meyden, R., and van der Torre, Leon. (Eds.). (2013). *Handbook of Deontic Logic and Normative Systems* (Vol. 1). London: College Publication.

Hilpinen, R. (Ed.). (1981). *New Studies in Deontic Logic: Norms, Actions, and the Foundations of Ethics*. Dordrecht: Kluwer.

Kulicki, P. and Trypuz, R. (2016). Multivalued logics for conflicting norms. In O. Roy, A. Tammaminga and M. Willer (Eds.), *Deontic Logic and Normative Systems 13th International Conference, DEON 2016, Bayreuth, Germany, 18–21, 2016* (pp. 123–138). London: College Publications.

Talja, J. (1985). On the logic of omissions, *Synthese 65*(2), 235–248.

Trypuz, R. (2008). *Formal Ontology of Action*. Lublin: Wydawnicto KUL.

Wikipedia. (n.d.). Antigone (Sophocles play). Retrieved October 15, 2025 from https://en.wikipedia.org/wiki/Antigone_(Sophocles_play)

Wright, G.H. von (1963). *Norm and Action: A Logical Enquiry*. London: Routledge, Keagan Paul.

Marcin Drofiszyn
Uniwersytet Wrocławski | ORCID: 0000-0003-0518-5721

Skąd się biorą obowiązki moralne?

Dokąd teraz pójdę kiedy nie istnieją już narody
Zapomniany przez anioły porzucony w środku drogi
Nie ma w kogo wierzyć nie ma kochać nienawidzić kogo
I nie dbają o mnie światy martwy zmierzch nad moją drogą

Jacek Kaczmarski, *Powrót* (2012, s. 112)

Abstrakt: W niniejszym artykule przedstawiłem zarys koncepcji obowiązku moralnego Henryka Elzenberga. Obowiązek składa się jednocześnie z powinności bytu, powinności sprawcy oraz powinności terminu. Obowiązek jest czymś, co być powinno, czymś, co być powinno zrealizowane przez określonego sprawcę, oraz czymś, co być powinno zrealizowane przez tego właśnie sprawcę w określonym momencie czasu. U podstaw każdej z tych powinności leży relacja preferencji woli metaempirycznej, czyli takiego rodzaju woli, która przedkłada jedne stany rzeczy nad inne wyłącznie ze względu na czyste racje rozumowe.

Przedstawioną tu koncepcję skonfrontowałem z teoriami obowiązku moralnego obecnymi we współczesnej filozofii analitycznej. Propozycja Elzenberga okazała się atrakcyjna w porównaniu z teoriami, które upatrują podstaw obowiązku w maksymalizacji dobra, w spełnianiu wymagań moralności oraz w realizacji imperatywów pewnej uprzywilejowanej woli.

Słowa kluczowe: normy powinnościowe [?], powinności, logika deontyczna, preferencja

1. Wstęp

W rozważaniach etycznych do czasów nowożytnych problem źródła obowiązku moralnego praktycznie nie był obecny. Każdy wiedział, co powinien robić. W starożytności czy średniowieczu człowieka uznawano za nieoddzielną część większej całości. Człowiek z urodzenia był wpleciony w określoną strukturę przeznaczenia, a także w strukturę społeczną. Każdy rodził się jako poddany woli Boga, Kościoła, króla i ojca. Stąd każdy znał swoje miejsce w świecie, znał swoją orientację aksjologiczną, a stąd wiedział, co powinien robić. Wiedział, co powinien jako dobry chrześcijanin, dobry gospodarz czy dobry syn. I co ważne, miał naturalną skłonność do wypełniania tych obowiązków. Widział w nich źródło swojej szczęśliwości, gdyż wypełniając je, stawał się w pełni sobą. Realizował przez nie swój *telos*. Gdyby jednak spróbował sprzeniewierzyć się swoim powinnościom, spotkałby się z sankcjami: potępieniem, więzieniem, banicją, ostracyzmem społecznym czy wewnętrzną dezintegracją osobowości.

Zobrazujmy to przykładem literackim. W *Buddenbrookach* Tomasz Mann przedstawia dylemat matrymonialny jednej z głównych bohaterek — Toni Buddenbrook. Tonia rozważa — jak to często w tych sprawach ma miejsce: iść za głosem serca czy rozumu. O jej rękę stara się pewien zamożny kupiec, czyli ktoś należący do jej sfery społecznej, do którego czuje ona nieodpartą niechęć powodowaną jego wyglądem. Sama jest zakochana w studencie medycyny należącym do nieco niższej klasy społecznej. Zobaczmy w poniższym cytacie, jak do poślubienia kupca namawia ją matka oraz jakimi drogami wiodą jej myśli. „Tak jak ci ojciec powiedział: masz czas do namysłu — ciągnęła dalej konsulowa. Ale musimy sobie powiedzieć, że nie co dzień nadarza się takie szczęście i że to małżeństwo jest dla ciebie nakazem obowiązku i przeznaczenia. Tak, moje dziecko, muszę ci to powiedzieć. Droga, która się dziś przed tobą otworzyła, jest ci przeznaczona, sama to dobrze wiesz... Tak — rzekła w zamyśleniu Tonia. Zapewne. Znała swe obowiązki względem rodziny i firmy i była z nich dumna. Ona, Antonina Buddenbrook, przed którą tragarz portowy, Matthiesen, z takim szacunkiem zdejmował swój włochaty cylinder, która jako córka konsula Buddenbrooka chodziła po mieście z miną małej władczyni — przejęta była historią swej rodziny. [...] Było jej powołaniem przyczynić się na swój sposób do podniesienia blasku rodziny i firmy »Jan Buddenbrook« wychodząc za mąż za człowieka bogatego i eleganckiego” (Mann, 1971, t. 1, s. 118).

Jak widzimy, małżeństwo z kupcem postrzegane jest jako obowiązek Toni wynikający z tego, że jest córką kupca, właściciela wielopokoleniowej rodzinnej firmy, z tego, że przynależy do wyższej sfery społecznej. To małżeństwo miałoby wpływ na stan finansowy firmy, reputację rodziny, dalsze dostatnie życie Toni oraz jej pozycję towarzyską. Małżeństwo ze studentem, a nawet później doktorem medycyny, byłoby pod każdym z tych względów degradacją Toni, czyli sprzeniewierzeniem się własnej tożsamości, a więc nie mogłoby dać jej szczęścia.

Obowiązki, o których mówimy, Elzenberg nazywa obowiązkami faktycznymi (*de facto*), bo miałyby one niejako wynikać z faktów. Z tego, że jestem córką kupca wynika, że powinnam wżenić się w inną rodzinę kupiecką. Z tego, że jestem członkiem wyższej sfery społecznej, wynika, że powinienem dbać o dobre maniery, szyk i prezencję. Nie ma tu jednak w istocie naruszenia tzw. gilotyny Hume'a, czyli zakazu przechodzenia we wnioskowaniu od bytu do powinności, bo czym w istocie są te role społeczne jak nie zbiorem powinności. Faktyczność tych obowiązków bierze się raczej stąd, że musi być jakiś możliwy do wskazania podmiot, nakazujący te czyny czy zachowania, i to pod groźbą sankcji. To klasa mieszczańska nakazuje swoim członkom małżeństwa tylko w ramach tej samej klasy lub wyższej, a w razie mezaliansu grozi szykanami, wydziedziczeniem, a nawet pogardą[1]. *Noblesse oblige* — pochodzenie z wyższej sfery zobowiązuje do godnego jej reprezentowania, aby odróżniać się od całej reszty społeczeństwa. Komuś, kto się temu sprzeniewierzy, grozi wykluczeniem towarzyskim: nigdzie nie jest zapraszany i jego zaproszenia pozostają bez odzewu.

Takich podmiotów, które nakładają na nas obowiązki, *de facto* jest wiele: władza polityczna, wspólnota społeczna lub wyznaniowa. Nie każdy jednak, kto nakazuje jakieś zachowania pod groźbą sankcji, jest źródłem obowiązków. Elzenberg podaje przykład bandyty, który nakazuje oddanie pieniędzy, grożąc zabiciem. Musi to być zatem jakiś czynnik powołany, wyróżniony. Ale takich czynników jest wiele, legitymizujących się różnymi względami. Któremu dać pierwszeństwo w momencie konfliktu, bo przecież nie da się ukryć, że zdarzają się przypadki ich wzajemnego wykluczania się? Przypomnijmy choćby *passus* Thomasa More'a, rozdartego między nakazem posłuszeństwa królowi Henrykowi VIII, który wymusza na nim zaaprobowanie cudzołóstwa przez złożenie przysięgi na akt supremacyjny, a nakazem sumienia, by dochować wierności własnym przekonaniom. Komu dać pierwszeństwo posłuchu? Czy temu, kto może nałożyć sroższe sankcje i je efektywniej wyegzekwować? Ale wówczas mamy po prostu uginanie się pod groźbą kary i trudno to nazwać obowiązkiem moralnym. Może więc komuś, kto

1 Za obraz literacki może tu służyć powieść *Trędowata* Heleny Mniszkówny.

wie lepiej co powinniśmy robić, czyli zna naszą powinność. Przebija się tu myśl o jakimś właściwym rozumieniu pojęcia obowiązku moralnego, obowiązku normatywnym (*de iure*), który nie jest już obowiązkiem „ze względu na". Mamy przecież pojęcie obowiązków moralnych, którym każdy podlega, niezależnie od tego kim jest i do czego dąży, a więc powinności działania o randze powszechnego obowiązywania i kategorycznego przymuszania. Uwypuklimy jego odrębność od obowiązku faktycznego również na przykładzie literackim.

W powieści Nicholasa Monsarrata *Okrutne morze* mamy przedstawiony epizod, w którym kapitan fregaty *Compass Rose*, George Ericson, staje przed pewnym dylematem moralnym (Monsarrat, 1976, s. 309–313). Fabuła powieści rozgrywa się w 1941 roku na Morzu Śródziemnym. *Compass Rose* jest okrętem Królewskiej Marynarki Wojennej przeznaczonej do zwalczania łodzi podwodnych. Omawiany epizod dzieje się w czasie rejsu z Anglii do Gibraltaru, podczas którego okręt ten ma za zadanie chronić konwój statków handlowych przed atakami niemieckich łodzi podwodnych. Wokół konwoju stale krąży kilka U-Bootów, które niemalże co noc zatapiają jakiś statek, natomiast eskorta jest w walce z nimi bezradna. Pewnego dnia, gdy *Compass Rose* podpływa do rozbitków ze storpedowanego w nocy statku, obsługa echosonaru łapie namiar na duży obiekt podwodny, który zostaje zinterpretowany jako wroga łódź podwodna. Problem w tym, że znajduje się ona dokładnie pod rozbitkami. Dylemat kapitana Ericsona polega na tym, że staje on przed dwoma obowiązkami, którym nie może jednocześnie sprostać. Jego obowiązkiem jest zwalczanie łodzi podwodnych, a więc jeśli tylko uzyskał namiar na jedną z nich, to powinien natychmiast atakować. Zrzucenie jednak min głębinowych spowoduje zabicie rozbitków. Z drugiej strony powinien on również ratować tych rozbitków, co wiąże się z umożliwieniem oddalenia się łodzi podwodnej albo wręcz wystawienie się jej jako łatwy cel (statek bez ruchu). Pierwszy z tych obowiązków to obowiązek *de facto* — powinność atakowania. Takie Ericson dostał rozkazy od dowództwa Marynarki Wojennej, a uchylanie się od nich grozi mu nawet sądem wojennym. Drugi to nakaz ratowania rozbitków, niewinnych ludzi, którzy wychładzają się na śmierć w lodowatej wodzie. Obowiązek ten wymyka się definicji obowiązku faktycznego, bo kto go nakłada na kapitana Ericsona? Czy jest jakaś namacalna sankcja w razie jego niespełnienia?

Natrafiamy tu na nowożytne pojęcie obowiązku moralnego. MacIntyre tak opisuje jego genezę w zestawieniu z etyką grecką: „mamy przejście od dobrze zdefiniowanych oczywistości związanych z moralnością wypełniania ról społecznych, gdzie osądzamy człowieka jako gospodarza, jako króla, czy jako ojca — do momentu, w którym ocena zostaje oddzielona od ról społecznych, zarówno w języku, jak i w praktyce, i nie zadajemy już pytania, co to znaczy być dobrym w czymś, czy też, co to znaczy być dobrym do czegoś, ale zadajemy pytanie, co to znaczy być »dobrym człowiekiem«. Nie zadajemy pytań, co należy do obowiązków człowieka jako duchownego czy właściciela ziemskiego, ale co należy do obowiązków człowieka jako »człowieka«" (MacIntyre, 2013, s. 138). Ericson staje więc przed dylematem człowieka jako kapitana fregaty, a obowiązkiem człowieka jako człowieka. Pierwszy z tych obowiązków wiemy skąd się bierze, jest nakazem jakiegoś czynnika powołanego do nakazywania pod groźbą sankcji. Drugi z tych obowiązków nie spełnia tych wymogów, bo co to za rola bycie człowiekiem, kto wyznacza jej powinności i jakie miałby grozić sankcje za sprzeniewierzenie się im? W dalszej części pracy zapytamy o źródło tego rodzaju obowiązków. Przedstawimy propozycję Elzenberga, a następnie teorie alternatywne względem niej, wraz z krytycznym komentarzem.

2. Obowiązek według Elzenberga

Elzenberg źródła obowiązku szuka w powinności. „Podstawową powinnością jest zawsze tylko powinność czegoś [...] bycia takim a takim" (2002a, s. 104–105). Są pewne stany rzeczy, które być powinny. Skoro zaś stan rzeczy polega na tym, że jakiemuś przedmiotowi przysługuje jakaś cecha, to można powiedzieć, że pewne przedmioty powinny mieć pewne cechy. Trzymając się przypadku kapitana Ericsona, można dać przykład powinnego stanu rzeczy, mówiąc, że rozbitkowie powinni być podjęci z wody. Dlaczego jednak pewne przedmioty powinny mieć pewne cechy? Co uzasadnia powinność podjęcia rozbitków z wody? Elzenberg miał tu dylemat (2002c, s. 247–248). Nie zadowalała go bowiem odpowiedź najbardziej oczywista, czyli odwołanie się do wartości: pewne przedmioty powinny mieć pewne cechy, bo gdy je posiadają, są bardziej wartościowe, niż gdy ich nie posiadają. Więcej wartości perfekcyjnej realizuje się w podjętych rozbitkach niż w rozbitkach umierających z wychłodzenia na morzu. Zamiast tego Elzenberg powołuje się na czyste racje rozumowe. Pewne przedmioty powinny mieć pewne cechy, o ile lepiej jest z punktu widzenia czystych racji rozumowych, gdy je posiadają, niż gdy są ich pozbawione. Elzenberg wyraża tą definicję powinności poprzez pojęcie woli metaempirycznej. „»Niechaj« będzie akt woli autonomicznej, niezmiennej i wspólnej podmiotom chcącym: stan rzeczy, na który jest skierowany taki akt woli nazywamy stanem »powinnym«"(2002b, s. 251). Powinne to chciane przez kogoś obdarzonego wolą metaempiryczną, czyli kogoś, kto nie kieruje się motywami emocjonalnymi, popędami, ale ma wzgląd jedynie na czyste racje rozumowe. Każdy obdarzony wolą metaempiryczną chce podjęcia rozbitków, bo są mocniejsze racje rozumowe, aby ich raczej wyłowić, aniżeli pozostawić na śmierć z wychłodzenia.

Dalej pozostaniemy raczej przy formie definicji powinności przez czyste racje rozumowe, a nie przez pojęcie wartości perfekcyjnej, chociaż nie ma to większego znaczenia, bo wydaje się, że obie są równoznaczne. Co może być bowiem *summa summarum* taką czystą racją rozumową, jeśli nie odwołanie się do jakiejś wartości? Co może być ostatecznie racją dla wyłowienia rozbitków, jeśli nie fakt, że więcej wartości perfekcyjnej realizuje się w ich życiu niż okrutnej śmierci, że świat jako całość jest bardziej wartościowy, gdy raczej mniej ludzi cierpi niż więcej. Gdyby pytając o powinność, było możliwe odwoływanie się do czystych racji rozumowych, bez odwoływania się ostatecznie do wartości, wówczas nie byłoby tak głębokich sporów etycznych. Można by je rozstrzygać na poziomie wiedzy. Tymczasem to, jakich dobiera się racji rozumowych, jest uzależnione od tego, o jaką wartość się zabiega.

Na potrzeby dalszej dyskusji wprowadzimy teraz język formalny L wraz z pewną interpretacją semantyczną. Słownik języka L zawiera jedynie:

— przeliczalnie wiele symboli zdaniowych p_0, p_1, p_2...,

— spójniki negacji, koniunkcji i implikacji materialnej: ~, $\wedge$, $\rightarrow$,

— przeliczalnie wiele jednoargumentowych operatorów modalnych sprawstwa s_0, s_1, s_2...,

— przeliczalnie wiele jednoargumentowych operatorów modalnych czasu t_0, t_1, t_2...,

— dwuargumentowy operator preferencji **b**,

— nawiasy:),(.

Każdy skończony ciąg symboli języka L będziemy nazywali wyrażeniem tego języka. Litery G, H, I... zastępować będą dowolnie ustalone wyrażenia. Wśród wszystkich wyrażeń wydzielimy teraz zbiór formuł poprawnie zbudowanych. Będzie to najmniejszy zbiór L^F taki, że:

— dla dowolnej liczby naturalnej i, p_i należy to L^F,

— jeśli G należy do L^F, to ~G należy do L^F,

— jeśli G, H należy do L^F, to G $\wedge$ H, G $\rightarrow$ H oraz G**b**H należą L^F,

— dla dowolnej liczby naturalnej i, jeśli G należy do L^F, to s_iG oraz t_iG należą do L^F.

Litery A, B, C... będą zastępować dowolnie ustalone formuły poprawnie zbudowane. Formułę o postaci **s**A czytamy: za sprawą podmiotu **s** jest tak, że A, gdzie **s** reprezentuje dowolnie wybrany element ciągu s_0, s_1, s_2... Natomiast jeśli **t** reprezentuje dowolnie wybrany element ciągu t_0, t_1, t_2..., to napis **t**A czytamy: w chwili **t** jest tak, że A. Można więc uznać, że **s** reprezentuje dowolnego sprawcę, a **t** dowolnie ustalony moment. Formułę o postaci A**b**B czytamy: na podstawie czystych racji rozumowych lepiej, gdy jest tak, że A, niż gdy jest tak, że B.

Przedstawimy teraz semantyczną interpretację zbioru formuł poprawnie zbudowanych języka L. Niech W będzie dowolnie ustalonym niepustym zbiorem światów możliwych. Elementy W oznaczamy literami **u**, **v**, **w** i rozumiemy je jako pewne możliwe okoliczności czy możliwe stany świata. Jak wiadomo, stany świata mogą przechodzić w inne, czyli łączy je relacja osiągalności. Ta relacja może być zrelatywizowana do możliwych sprawców s_0, s_1, s_2... oraz możliwych chwil t_0, t_1, t_2... Niech S^R będzie nieskończonym ciągiem dwuargumentowych relacji osiągalności S_0, S_1, S_2... zadanych na elementach zbioru W, takich, że dla dowolnego elementu S tego ciągu, światów **u**, **v**, napis **u**S**v** oznacza, że świat **v** jest osiągalny ze świata **u** za sprawą podmiotu **s**. Z kolei przez T^R będziemy oznaczać nieskończony ciąg dwuargumentowych relacji osiągalności T_0, T_1, T_2... zadanych na elementach zbioru W, takich, że dla dowolnego elementu T tego ciągu, światów **u**, **v**, skrót **u**T**v** oznacza, że świat **v** jest osiągalny ze świata **u** w chwili **t**.

Zakładamy również, że stany świata mogą być porównywalne między sobą co do wartości, ale zawsze z jakiegoś ustalonego punktu widzenia. O tym, że dany świat jest lepszy od innego, decydują oczywiście czyste racje rozumowe, a więc mamy tu do czynienia z preferowaniem woli metaempirycznej. Relację preferencji metaempirycznych oznaczamy literą B, a stąd, dla dowolnych światów **u**, **v**, **w**, napis $\mathbf{v}B_{\mathbf{u}}\mathbf{w}$ oznacza, że z punktu widzenia świata **u**, świat **v** jest lepszy niż świat **w**.

Niech V będzie funkcją wartościowania symboli zdaniowych. Przyporządkowuje ona każdemu symbolowi zdaniowemu pewien podzbiór zbioru W.

Strukturę relacyjną $M = \langle W, S^R, T^R, B, V \rangle$ nazywać będziemy modelem języka L. Określimy teraz dokładnie, co to znaczy, że jakaś formuła poprawnie zbudowana C języka L jest prawdziwa w świecie **u** modelu M (w skrócie: $(M, \mathbf{u}) \vDash C$).

$(M, \mathbf{u}) \vDash p_i$ wtw. $\mathbf{u} \in V(p_i)$,

$(M, \mathbf{u}) \vDash {\sim}A$ wtw. nieprawda, że $(M, \mathbf{u}) \vDash A$,

$(M, \mathbf{u}) \vDash A \land B$ wtw. $(M, \mathbf{u}) \vDash A$ i $(M, \mathbf{u}) \vDash B$.

$(M, \mathbf{u}) \vDash A \rightarrow B$ wtw. jeśli $(M, \mathbf{u}) \vDash A$, to $(M, \mathbf{u}) \vDash B$.

$(M, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{s}A$ wtw. dla każdego świata $\mathbf{v}$, jeśli $\mathbf{u}S\mathbf{v}$, to $(M, \mathbf{v}) \vDash A$.

W świecie **u** modelu M prawdą jest, że za sprawą podmiotu **s** jest tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym świecie osiągalnym z **u** za sprawą podmiotu **s** jest tak, że A. Definicję tę możemy uprościć, wprowadzając dwa skróty definicyjne. Zbiór $|A|^M = \{\mathbf{u}: (M, \mathbf{u}) \vDash A\}$ nazywać będziemy treścią propozycjonalną formuły A w modelu M, a zbiór $[\mathbf{u}]^S = \{\mathbf{v}: \mathbf{u}S\mathbf{v}\}$ będzie dla nas zakresem osiągalności sprawcy **s** z punktu widzenia świata **u**. Stąd możemy teraz napisać

$$(M, \mathbf{w}) \vDash \mathbf{s}A \text{ wtw. } [\mathbf{w}]^S \subseteq |A|^M.$$

W świecie **u** modelu M prawdą jest, że za sprawą podmiotu **s** jest tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy zakres tego, co osiągalne dla sprawcy **s** ze świata **u** jest zawarty w stanie rzeczy A. Podobnie wprowadzamy definicję zbioru $[\mathbf{u}]^T = \{\mathbf{v}: \mathbf{u}T\mathbf{v}\}$ jako zakresu tego, co jest osiągalne ze świata **u** w chwili **t**, a stąd

$$(M, \mathbf{w}) \vDash tA \text{ wtw. } [w]T \subseteq |A|M.$$

W świecie **u** modelu M prawdą jest, że w chwili **t** jest tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy zakres tego, co osiągalne w chwili **t** ze świata **u** jest zawarty w stanie rzeczy A. Teraz

$$(M, \mathbf{u}) \vDash A\mathbf{b}B \text{ wtw. dla każdego świata } \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ jeśli } \mathbf{v} \in |A|^M \text{ i } \mathbf{w} \in |B|^M, \text{ to } \mathbf{v}B_{\mathbf{u}}\mathbf{w}.$$

W świecie **u** modelu M prawdą jest, że lepiej z punktu widzenia czystych racji rozumowych, gdy jest tak, że A, niż gdy jest tak, że B wtedy i tylko wtedy, gdy z punktu widzenia świata **u** stan rzeczy A jest lepszy od stanu rzeczy B.

Korzystając z wprowadzonych środków formalnych, możemy zapisać definicję powinnego stanu rzeczy:

$$\mathbf{pow}A \text{ wtw. } A\mathbf{b}{\sim}A.$$

Powinno być tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy z punktu widzenia czystych racji rozumowych lepiej, gdy jest tak, że A, niż gdy nie jest tak, że A. Możemy również ustalić warunek prawdziwości dla normy o powinności, mianowicie

$$(M, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{pow}A \text{ wtw. dla każdego świata } \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ jeśli } \mathbf{v} \in |A| \text{ i } \mathbf{w} \in |{\sim}A|, \text{ to } \mathbf{v}B_{\mathbf{u}}\mathbf{w}.$$

W świecie **u** modelu M prawdą jest, że powinno być tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy z punktu widzenia świata **u** lepiej jest, gdy stan rzeczy A zachodzi, niż gdy nie zachodzi.

Przejdziemy już do genezy samego obowiązku. Wychodzimy od tego, że pewne stany rzeczy powinny być, czyli od tego, że pewne przedmioty powinny mieć pewne cechy. Dalej natrafiamy na alternatywę rozłączną: przedmioty te cechy mają albo ich nie mają. Jeśli je mają, to są przedmiotami wartościowymi. Są takie, jakie być powinny. Ale jeśli ich nie mają, to na mocy swojej powinności domagają się ich, domagają się bycia przedmiotami wartościowymi. I teraz, jeśli pojawia się choć jeden podmiot, który może sprawić zajście tego, co być powinno, to spada na niego powinność innego rodzaju — powinność działania. Powinien sprawić, aby dany przedmiot miał taką cechę, jaką mieć powinien. Rozbitkom powinno się pomóc, a jeśli jest ktoś, kto to może zrobić, to on powinien pomóc rozbitkom. Jeżeli takich sprawców możliwych jest wielu, to można powiedzieć zarazem, że każdy z nich powinien się podjąć realizacji oraz żaden. Każdy, bo powinność jakoś wisi nad każdym, wywierając pewien nacisk na jego wolę, ale z drugiej strony żaden, bo nie ma dostatecznej racji, aby właśnie na tego, a nie na innego spadł jako jego obowiązek[2]. „Najlepiej więc ująć rzecz tak, że któryś (przynajmniej jeden) ze sprawców możliwych powinien przedmiot uczynić takim a takim. Nie wiadomo jednak który; powinność wisi poniekąd nad wszystkimi, ale na nikogo jeszcze nie spadła" (Elzenberg, 2002a, s. 106).

Na którego z możliwych sprawców spadnie więc powinność działania jako jego obowiązek? Którego z kapitanów statków będących na Morzu Śródziemnym powoła się do pomocy naszym rozbitkom (mówimy o kapitanach, bo tylko oni dysponują wolną wolą, w przeciwieństwie do załóg, a więc mogą być możliwymi sprawcami tego, co być powinno)? „Oczywiście powoła się tego, który czynność zadaną wykona najlepiej. Co znaczy najlepiej? Przede wszystkim, który najbardziej się zbliży do zrealizowania całości danego dobra. A więc: wykona zadanie możliwie najpełniej (w czym także najdokładniej itd.). Już tutaj działa zasada maksymalizacji w postaci: »tak wybrać sprawcę by przy spełnianiu powinności właśnie przez niego ostateczna suma dobra na świecie [...] będzie większa niż przy wyborze jakiegokolwiek innego sprawcy [...] Dalej, kto je wykona z największą ekonomią czasu i sił w myśl zasady maksymalizacji dobra [...] dalej ten, kto »stoi najbliżej««" (Elzenberg, 2002a, s. 115). Spośród możliwych sprawców powinność spada jako obowiązek na tego, kto najlepiej zrealizuje to, co być powinno, a więc kto posiada niezbędną do tego wiedzę, umiejętności, ale również

2 Potwierdzają to empiryczne badania psychologów społecznych, którzy zauważają, że im więcej ludzi jest świadkami wypadku, tym mniej prawdopodobne jest, że ktokolwiek będzie udzielał pomocy. Będąc w grupie obserwatorów, jednostka zakłada, że są tu inni – lepsi do tego, żeby pomóc. Obecność innych powoduje zmniejszenie poczucia własnej odpowiedzialności za zaangażowanie w działanie (Darley i Latané, 1968, s. 377–383).

i sposobność, aby z tych kompetencji skorzystać[3]. Naszym rozbitkom powinni pomóc wszyscy kapitanowie statków płynących w okolicy rozbitków, którzy wiedzą, jak to zrobić, mają ku temu przeszkoloną załogę oraz przystosowany statek. Ostatecznie powołanie do działania spadło na kapitana *Compass Rose*, bo spełniał te kryteria, a dodatkowo był najbliżej. Miał możliwość wyłowić najwięcej osób żywych.

Zauważmy, że podane przez Elzenberga kryteria doboru sprawcy dla realizacji powinności mają charakter czystych racji rozumowych: tego powołuje się, kto zrealizuje maksymalnie dobro przy minimalnym zaangażowaniu, będąc w pełni zorientowany w sytuacji. Można więc powiedzieć, że wola metaempiryczna nie tylko decyduje o tym, co powinno być, ale i o doborze najlepszego sprawcy dla realizacji tego, co powinno być. Dlatego nie będzie zbytnim nadużyciem względem ustaleń Elzenberga, gdy zdefiniuje się powinność sprawcy również za pomocą operatora preferencji woli metaempirycznej:

$$\mathbf{pow}(\mathbf{s}A) \text{ wtw. } (\mathbf{s}A)\mathbf{b}({\sim}\mathbf{s}A),$$

co czytamy: powinno być tak, że za sprawą podmiotu **s** jest tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy z punktu widzenia czystych racji rozumowych lepiej, gdy za sprawą podmiotu **s** jest tak, że A, niż nieprawda, że za sprawą podmiotu **s** jest tak, że A (w szczególności, za sprawą jakiegokolwiek innego sprawcy niż **s** jest tak, że A).

Warunek prawdziwości dla powinności sprawcy przybiera postać:

$$(M, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{pow}(\mathbf{s}A) \text{ wtw. dla każdego świata } \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ jeśli } \mathbf{v} \in [\mathbf{u}]^S \cap |A| \text{ i } \mathbf{w} \in -[\mathbf{u}]^S \cap |A|, \text{ to } \mathbf{v}B_{\mathbf{u}}\mathbf{w}.$$

Pownność sprawcy to jeszcze nie sam obowiązek. To, co lepiej na mocy czystych racji rozumowych, żeby raczej było, niż nie było zrealizowane przez jakiś podmiot, samo w sobie może być obojętne czy wręcz przeciwpowinne. Ponadto, do pełnego zobowiązania jakiegoś podmiotu do realizacji tego, co powinne, musi dojść wyznaczenie w czasie. Inaczej sprawca zawsze może uchylać się przed tym, co powinien zrealizować, odwlekając czynność w czasie[4]. W przypadku przydziału chwili jako powinności terminowej również, zdaniem Elzenberga, działa zasada maksymalizacji dobra. Jak pisze on: „należy czynności tak rozdzielić mię-

3 Podobnie Vranas, dyskutując zasadę Kanta: jeśli podmiot w danej chwili ma obowiązek zrobienia czegoś, to tylko pod warunkiem, że podmiot ten ma w tym samym czasie zarazem zdolność (*ability*) i sposobność (*opportunity*) wykonania tego (Vranas, 2007, s. 171).

4 Widać to w żargonie wojskowym, gdzie przełożony, nakładając na kogoś powinność realizacji jakiegoś stanu rzeczy, podaje zawsze „czas operacyjny". W żartobliwej zaś formie w wierszu Mariana Załuckiego *Dyżurny Ptyś*, w którym tytułowy dyżurny tak odwleka w czasie realizację swoich obowiązków, że ostatecznie spadają one na dyżurnego w następnym tygodniu.

dzy sprawców i tak rozmieścić je w czasie, żeby wytworzona przez nich wszystkich suma dobra była największa". Możemy więc również przy jej definicji posłużyć się operatorem preferencji woli metaempirycznej. Stąd

$$\mathbf{pow}(\mathbf{t}A) \text{ wtw. } (\mathbf{t}A)b({\sim}\mathbf{t}A),$$

co czytamy: powinno być tak, że w chwili **t** jest tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy z punktu widzenia czystych racji rozumowych lepiej, gdy w chwili **t** jest tak, że A, niż nieprawda, że w chwili **t** jest tak, że A (w szczególności, w jakiejkolwiek innej chwili niż **t** jest tak, że A).

Warunek prawdziwości dla powinności terminowej wygląda następująco:

$$(M, \mathbf{u}) \vDash \text{pow(tA) wtw. dla każdego świata } \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ jeśli } \mathbf{v} \in [\mathbf{u}]^{T} \cap |A| \text{ i } w \in -[\mathbf{u}]^{T} \cap |A|, \text{ to } \mathbf{vB_{u}w}.$$

Powinność terminowa to oczywiście także jeszcze nie obowiązek. To, co lepiej na mocy czystych racji rozumowych, żeby raczej było, niż nie było zrealizowane w jakiejś chwili, samo w sobie może być obojętne czy wręcz przeciwpowinne. Ponadto, „może być powinność terminowa, a jednocześnie nieprzydzielona określonemu sprawcy. Np.: jest głód [...]. Głód ten powinien być usunięty w terminie [...] bo inaczej wszyscy wymrą. Ale nie ma nikogo desygnowanego do niesienia tej pomocy (póki się nie zawiążą komitety itp.) Tu nie ma obowiązku" (Elzenberg, 2002a, s. 108). Mogą być powinne stany rzeczy, nawet wyznaczone co do czasu realizacji przez wskazanie dokładnie terminu albo przez wyznaczenie pewnych warunków, które muszą być spełnione, aby powinność terminowa się pojawiła.

Jesteśmy gotowi podać definicję obowiązku. Na obowiązek składają się jednocześnie: powinność bytu, powinność sprawcy i powinność terminowa:

$$\mathbf{obw}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. } \mathbf{pow}A \wedge \mathbf{pow}(\mathbf{s}A) \wedge \mathbf{pow}(\mathbf{t}(\mathbf{s}A)).$$

Jest obowiązkiem dla podmiotu **s** w chwili **t** sprawić, aby było tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy powinno być tak, że A i powinno być tak, że A za sprawą podmiotu **s** i powinno być tak, że A za sprawą podmiotu **s** w chwili **t**. Bardziej zaś szczegółowo:

$$\mathbf{obw}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. } A\mathbf{b}{\sim}A \wedge (\mathbf{s}A)\mathbf{b}({\sim}\mathbf{s}A) \wedge (\mathbf{t}(\mathbf{s}A))\mathbf{b}({\sim}\mathbf{t}(\mathbf{s}A)),$$

jest obowiązkiem dla podmiotu **s** w chwili **t** sprawić, aby było tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy na mocy czystych racji rozumowych lepiej, gdy jest tak, że A, niż gdy nie jest tak, że A i na mocy czystych racji rozumowych lepiej, gdy za sprawą podmiotu **s** jest tak, że A, niż za sprawą podmiotu **s** nie jest tak, że A (w szczególności, jest tak, że A za sprawą jakiegokolwiek innego podmiotu niż **s**) i na mocy czystych racji rozumowych lepiej, gdy jest tak, że A za sprawą podmiotu **s** w chwili **t**, niż gdy nie jest tak, że A za sprawą podmiotu **s** w chwili **t** (w szczególności, jest tak, że A za sprawą podmiotu **s** w jakiejkolwiek innej chwili niż **t**). Tak więc jest obowiązkiem kapitana *Compass Rose* natychmiastowe podjęcie rozbitków z morza, ponieważ na mocy czystych racji rozumowych: lepiej, żeby zostali oni podjęci z morza niż pozostawieni w nim, i lepiej, żeby zostali podjęci z morza przez *Compass Rose* niż jakikolwiek inny statek, i lepiej, żeby zostali podjęci przez *Compass Rose* właśnie teraz, a nie kiedykolwiek później.

I jeszcze warunek semantyczny:

$$(\mathrm{M}, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{obw}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathrm{A}) \text{ wtw. dla każdego } \mathbf{v}, \mathbf{w}, \text{ jeśli } \mathbf{v} \in |\mathrm{A}|^{\mathrm{M}} \text{ i } \mathbf{w} \in |{\sim}\mathrm{A}|^{\mathrm{M}}, \text{ to } \mathrm{B}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

i dla każdego $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, jeśli $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap |\mathrm{A}|^{\mathrm{M}}$ i $\mathbf{w} \in -[\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap |\mathrm{A}|^{\mathrm{M}}$, to $\mathrm{B}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ i dla każdego $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, jeśli $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}]^{\mathrm{T}} \cap [\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap |\mathrm{A}|^{\mathrm{M}}$ i $\mathbf{w} \in -[\mathbf{u}]^{\mathrm{T}} \cap [\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap |\mathrm{A}|^{\mathrm{M}}$, to $\mathrm{B}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Prawdą jest w świecie **u** modelu M to, że jest obowiązkiem dla podmiotu **s** w chwili **t** sprawić, aby było tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy z punktu widzenia świata **u** każdy świat, w którym jest tak, że A jest lepszy od każdego świata, w którym nie jest tak, że A, i z punktu widzenia świata **u** każdy świat, w którym jest tak, że A za sprawą podmiotu **s** jest lepszy od dowolnego świata, w którym jest tak, że A za sprawą jakiegokolwiek innego podmiotu niż **s**, i z punktu widzenia świata **u** każdy świat, w którym jest tak, że A za sprawą podmiotu **s** w chwili **t** jest lepszy od dowolnego świata, w którym jest tak, że A za sprawą podmiotu **s** w jakiejkolwiek innej chwili innej niż **t**.

3. Alternatywne teorie obowiązku

3.1. Obowiązek jako maksymalizacja dobra

Elzenberg w toku pracy nad swoim systemem poczynił wiele uwag krytycznych względem alternatywnych teorii istoty obowiązku moralnego. Prześledzenie teorii alternatywnych wraz z tymi komentarzami pozwoli wyraźniej dostrzec zalety propozycji Elzenberga. Komentarze te są wciąż aktualne, ponieważ krytykowane teorie, jak się dalej okaże, ciągle znajdują reprezentantów we współczesnej filozofii analitycznej.

Przegląd alternatywnych stanowisk dotyczących istoty obowiązku moralnego zacznę od teorii najbliższych zaproponowanej przez Elzenberga. W ogólnym sformułowaniu teorie te głoszą, że obowiązkowe postępowanie to takie, które zmierza do maksymalizacji dobra. Teorie te różnią się między sobą w określeniu, o czyje konkretnie dobro miałoby chodzić oraz czym miałoby ono konkretnie być. W klasycznym sformułowaniu G. E. Moore'a czytamy: „dajemy nazwę »obowiązek« działaniom, które generalnie przynoszą lepszy ogólny wynik w najbliższej przyszłości niż jakakolwiek możliwa alternatywa" (Moore, 2004, s. 181). Inaczej mówiąc, jest obowiązkiem dla podmiotu **s** sprawić w chwili **t**, że A wtedy i tylko wtedy, gdy lepiej, że za sprawą podmiotu **s** w chwili **t** jest tak, że A, niż jakkolwiek inaczej (nie jest tak, że A). W naszym języku formalnym można powyższą definicję wyrazić:

$$\mathbf{obw}_{\mathbf{M}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathrm{A}) \text{ wtw. } (\mathbf{st}\mathrm{A})\mathbf{b}(\mathbf{st}{\sim}\mathrm{A}).$$

Definicja ta przekłada się na następujący warunek prawdziwości dla norm o obowiązku:

$$(\mathrm{M}, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{obw}_{\mathbf{M}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathrm{A}) \text{ wtw. dla każdego } \mathbf{v}, \mathbf{w}, \text{ jeśli } \mathbf{v} \in [\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap [\mathbf{u}]^{\mathrm{T}} \cap |\mathrm{A}|^{\mathrm{M}} \text{ i } \mathbf{w} \in [\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap [\mathbf{u}]^{\mathrm{T}} \cap -|\mathrm{A}|^{\mathrm{M}}, \text{ to } \mathrm{B}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Stanowisko Moore'a było poddawane krytyce oraz dalszym modyfikacjom. Na przykład Feldman zauważa, że skoro A jest obowiązkiem dla podmiotu **s** w chwili **t**, ponieważ A jest najlepsze, co **s** może zrobić w chwili **t**, to co w przypadku, gdy A można zrealizować na wiele sposobów, i to lepszych lub gorszych (Feldman, 1986, s. 40)? Aby temu zaradzić, Goble proponuje ograniczyć rozpatrywanie alternatyw tylko do tych, które definiuje jako najbliższe dla zastanych okoliczności (Goble, 1993, s. 157). Z kolei sam Feldman proponuje uznać A za obowiązkowe dla podmiotu **s** w chwili **t** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka realizacja A dla podmiotu **s** w chwili **t**, dla której nie ma już lepszej alternatywy.

$$\mathbf{obw}_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathrm{A}) \text{ wtw. } \Diamond\mathbf{st}\mathrm{A} \wedge {\sim}((\mathbf{st}{\sim}\mathrm{A})\mathbf{b}(\mathbf{st}\mathrm{A})),$$

co prowadzi do zmian w warunku semantycznym w taki sposób:

$$(\mathrm{M}, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{obw}_{\mathbf{F}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathrm{A}) \text{ wtw. istnieje taki } \mathbf{v}, \mathbf{v} \in [\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap [\mathbf{u}]^{\mathrm{T}} \cap |\mathrm{A}|^{\mathrm{M}} \text{ i dla każdego } \mathbf{w}, \text{ jeśli } \mathbf{w} \in [\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap [\mathbf{u}]^{\mathrm{T}} \cap -|\mathrm{A}|^{\mathrm{M}}, \text{ to nieprawda, że } \mathrm{B}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Podejście Feldmana spotkało się z krytyką ze strony Zimmermana (1996, s. 61). Skoro jest obowiązkiem to, że A dla podmiotu **s** w chwili **t**, o ile istnieje taka realizacja A, dla której nie ma już lepszej alternatywy, to co w przypadku, gdy dla każdej realizacji A możemy znaleźć jakąś lepszą alternatywę, i tak *ad infinitum*? Ponadto takich łańcuchów coraz lepszych możliwości może być wiele i to niewspółmiernych pod względem wartości. Stąd Zimmerman proponuje własną modyfikację, zgodnie z którą obowiązkowe dla podmiotu **s** w chwili **t** jest to, że A, o ile dla każdej alternatywy innej niż A można znaleźć lepszą A alternatywę, dla której nie ma już lepszej dla **s** w chwili **t**[5]

$$\mathbf{obw_Z}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. } (\mathbf{st}{\sim}A \rightarrow ((\Diamond \mathbf{st}A)\mathbf{b}(\mathbf{st}{\sim}A) \wedge {\sim}((\mathbf{st}{\sim}A)\mathbf{b}(\mathbf{st}A)))).$$

Stąd w semantyce

$$(M, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{obw_Z}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. dla każdego } \mathbf{w}, \text{ jeśli } \mathbf{w} \in [\mathbf{u}]^S \cap [\mathbf{u}]^T \cap -|A|^M, \text{ to istnieje taki } \mathbf{v}, \mathbf{v} \in [\mathbf{u}]^S \cap [\mathbf{u}]^T \cap |A|^M \text{ i } B_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ i dla każdego } \mathbf{z}, \text{ jeśli } \mathbf{z} \in [\mathbf{u}]^S \cap [\mathbf{u}]^T \cap -|A|^M, \text{ to nieprawda, że } B_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, \mathbf{v}).$$

Jak widzimy, Elzenberg zgadza się z przedstawionymi teoriami w tym, że obowiązek polega na robieniu tego, co najlepsze. Jego stanowisko ma jednak zupełnie inaczej umiejscowiony punkt ciężkości w tym względzie, co łatwo dostrzec, porównując przedstawione definicje pod kątem tego, jak jest zadana relacja preferencji **b**. Dla teorii Moore'a i jemu pokrewnych do obowiązku podchodzi się od strony sprawcy, pytając, co najlepszego może on zrobić w danych okolicznościach. To rodzi znane trudności[6]. Dla Elzenberga największa trudność polega na tym, że to, co dany podmiot może w danej chwili zrobić najlepszego, może być jednocześnie czymś bardzo złym moralnie albo co najmniej może przynieść lepsze efekty, jeśli zostanie odroczone w czasie lub zostanie oddane do realizacji komuś innemu, bardziej kompetentnemu czy lepiej umiejscowionemu (Elzenberg, 2002c, s. 277–283). Jak czytamy, „źródłem błędu Moore'a (i innych) zdaje się być podchodzenie do problemu obowiązku jednostronnie od strony sprawcy i jego alternatyw w danej chwili, zamiast podejść od strony pytania: »co ma być dokonane?«. Prowadzi to do stawiania kwestii tak, jak gdyby sprawca był sam na świecie i rozporządzał tylko daną chwilą czasu, do zapomnienia o wpływie, jaki na jego powinność wywiera czynnik czasu i fakt istnienia innych sprawców możliwych" (Elzenberg, 1986, s. 33). Z tych powodów Elzenberg podchodzi do obowiązku od strony niejako wszechświata, pytając najpierw, co jest do zrobienia, a potem dopiero, kto to może najefektywniej zrealizować i w jakim najlepszym momencie. W danych okolicznościach uniwersalistycznie scharakteryzowana relacja preferencji **b** nie tylko przedkłada pewne sytuacje nad inne, ale również preferuje dla realizacji owych sytuacji pewne podmioty nad innymi oraz pewne chwile nad innymi[7].

---

5 Zakłada się dodatkowo, że A jest opcjonalne dla s w chwili t ($\Diamond$stA $\wedge$ $\Diamond$st~A).

6 Podmiot w każdej teraźniejszej chwili jest moralnie zobowiązany do maksymalizacji dobra, nawet swoim kosztem. To jest dość przytłaczające i może prowadzić do dezintegracji osobowości.

7 Różnica tych punktów ciężkości wynika z głębiej ukrytego przeświadczenia o roli obowiązków w horyzoncie aksjologicznym człowieka. W przedstawionych teoriach uznaje się milcząco życie człowieka za złożone z obowiązków. To obowiązek ma być głównym kompasem

3.2. Obowiązek jako spełnianie wymogów moralności

Przechodzę teraz do grupy teorii, dla których spełnianie czynu obowiązkowego polega na realizacji jakiejś normy, reguły czy też zasady praktyki instytucjonalnej. Ogólnie obowiązek rozumiany jest tutaj jako wypełnianie tego, co moralność zaleca, a co dla prostoty nazwiemy zasadą obowiązku (Chellas, 1980, s. 191).

Jak łatwo zauważyć, już standardowe ujęcie logiki deontycznej można postrzegać jako wyraz tego rodzaju teorii. Przypomnę warunek prawdziwości:

$$(\mathrm{M}, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{obw}_{\mathrm{S}}(\mathrm{s}, \mathbf{t}, \mathrm{A}) \text{ wtw. } \mathbf{Z}(\mathbf{u}) \subseteq [\mathbf{u}]^{\mathrm{T}} \cap [\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap |\mathrm{A}|^{\mathrm{M}},$$

gdzie **Z** jest funkcją, która dowolnemu światu **u** przypisuje zbiór światów dla niego wzorcowych, czyli właśnie takich, które spełniają jakiś wzorzec moralny dla świata **u**. Wszystko, co jest wymagalne moralnie w świecie **u**, zachodzi w każdym świecie należącym do obrazu świata **u** *via* funkcja **Z**. Stąd cały warunek prawdziwości dla normy o obowiązku możemy rozumieć tak, że prawdą jest, iż jest obowiązkiem dla podmiotu **s** w chwili **t** sprawić, aby było tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym świecie spełniającym wzorzec moralny dla świata **u** jest tak, że A za sprawą podmiotu **s** w chwili **t**[8].

Podobne rozumienie istoty obowiązku leży u podstaw teorii, które powstały za sprawą pomysłu redukcji logiki deontycznej do logiki aletycznej (Anderson, 1956; Smiley, 1963; Kanger, 1971). Jeśli do naszego języka formalnego wprowadzić stałą nazwową Z, będącą reprezentacją tego, co moralność zaleca, czyli zasady obowiązku, to wówczas można sformułować definicję

$$\mathbf{obw}_{\mathrm{A}}(\mathrm{s}, \mathbf{t}, \mathrm{A}) \text{ wtw. } (\mathrm{Z} \rightarrow \mathbf{st}\mathrm{A}),$$

co w semantyce znajduje sobie wyraz w warunku prawdziwości dla $\mathbf{obw}_{\mathrm{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathrm{A})$:

$$(\mathrm{M}, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{obw}_{\mathrm{A}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathrm{A}) \text{ wtw. } |\mathrm{Z}| \subseteq [\mathbf{u}]^{\mathrm{S}} \cap [\mathbf{u}]^{\mathrm{T}} \cap |\mathrm{A}|^{\mathrm{M}}.$$

Wspólna dla obu formalizacji jest próba uchwycenia ogólnej formy teorii deskryptywistycznych: jest jakaś zasada obowiązku, czyli coś, co czyni w danych okolicznościach daną sytuację obowiązkową dla

moralnym człowieka. Dla Elzenberga obowiązki moralne w życiu jedynie się przydarzają w wyjątkowych okolicznościach, natomiast głównym naszym wyznacznikiem działań moralnych są wartości (2002c, s. 287).

8 Aby wykluczyć taką możliwość, że obowiązkiem w świecie **u** dla podmiotu **s** w chwili **t** staje się coś, co tylko przypadkowo zachodzi w każdym świecie wzorcowym dla świata **u**, Jarmużek i Klonowski proponują do tej definicji dodać warunek, na mocy którego treść propozycjonalna formuły A jest w jakimś istotnym sensie powiązana z treścią zasady obowiązku dla świata **u** (2020, s. 351).

danego sprawcy w pewnej chwili. W toku rozwoju refleksji moralnej próbowano sobie na różne sposoby radzić z zadaniem ustalenia zasady obowiązku, pytając o jej istotę oraz sposób poznawania. Dla przykładu, Sidgwick (1966) twierdzi, że można wyróżnić takie trzy podstawowe zasady (nazywa je metodami etyki): intuicjonizm, egoistyczny hedonizm oraz hedonizm uniwersalistyczny. Dla intuicjonizmu zasada obowiązku byłaby czymś *sui generis*, rozpoznawanym w sposób bezpośredni, czyli właśnie przez intuicję. Przy czym możemy intuicyjnie uchwytywać obowiązek w tych konkretnych okolicznościach dla konkretnej osoby i czasu albo ogólne reguły obowiązku, dla których obowiązek tej konkretnej osoby, czasu i okoliczności byłby jedynie uszczegółowieniem. Pierwszy typ intuicji określa Sidgwick jako intuicję percepcyjną, drugi — dogmatyczną. Z kolei dla hedonisty egoistycznego zasada obowiązku polega na maksymalizacji bilansu szczęścia dla siebie samego, a dla hedonizmu uniwersalistycznego liczy się bilans szczęścia dla wszystkich czujących istot, obecnych i przyszłych.

Obie formalizacje różnią się jednak od siebie. W pierwszym przypadku treść propozycjonalna zasady obowiązku jest reprezentowana w semantyce przez obraz funkcji Z dla konkretnych okoliczności **u**, a w drugim przypadku treść ta jest reprezentowana jako stały zbiór światów. Z tego względu w pierwszym przypadku zasada obowiązku może mieć charakter uniwersalny — w każdych okolicznościach taki sam — ale nie musi, w drugim przypadku takiej relatywizacji zasady obowiązku do konkretnych okoliczności już się nie dopuszcza. Zasada obowiązku jest ta sama we wszystkich możliwych okolicznościach.

To była pierwsza różnica. Druga dotyczy wyrażalności zasady obowiązku. Skoro bowiem treść propozycjonalna zasady obowiązku jest pewnego rodzaju zbiorem światów możliwych, zatem stanowi pewnego rodzaju sytuację. Jest to taka sytuacja, poprzez którą inne sytuacje stają się obowiązkowe. I teraz, dla pierwszego przypadku formalizacji taka sytuacja nie musi być wyrażalna w języku, może nie być takiej formuły, której korelatem semantycznym byłaby ta sytuacja. W przypadku drugiej formalizacji takiej dowolności już nie ma, gdyż mamy tu do czynienia ze stałą zdaniową, która reprezentuje formułę będącą obrazem logicznym tego, co czyni obowiązkowym. Zakłada się więc, że to, co czyni obowiązkiem, jest wyrażalne w języku.

Zdaniem Elzenberga teorie obowiązku oparte na odwołaniu do zasady obowiązku są błędne, a ich pozory poprawności biorą się ze złudzenia, w jaki sposób na co dzień ustalamy, co jest naszym obowiązkiem (2002c, s. 273–276). Otóż obowiązek moralny pojawia się w naszym życiu rzadko, bo najczęściej kierujemy się czynnikami interesu i skłonności, ale gdy już się pojawia powinność, to najczęściej wiemy, co robić. Bez głębszego zastanowienia, raczej pewnym wyczuciem, odwołujemy się do oczywistych dla nas reguł „nie zabijaj", „spłacaj długi". Stąd wydaje nam się, że znamy te reguły z intuicji. A jeśli już pytamy, dlaczego nie zabijać czy spłacać długi, to najczęściej znajdujemy uzasadnienie w motywie, który nami kieruje przy przestrzeganiu tych reguł, jak: to przyczynia się do mojego szczęścia lub szczęścia powszechnego. To, co stale towarzyszy wypełnianiu obowiązków, przyjmujemy za ich źródło. Tymczasem reguły te są indukcyjnymi uogólnieniami z wielu naszych preferencji woli metaempirycznej. Pozwalają łatwo i szybko decydować, w większości przypadków trafnie, o naszym obowiązku. Jednakże jako uogólnienia, nabyte w praktyce społecznej jednostek czy zbiorowości, mają jedynie charakter ograniczonej stosowalności, a więc nie wyczerpują pełnego spektrum możliwości. Przychodzą bowiem takie sytuacje w życiu, kiedy rozpoznajemy granicę możliwości stosowania zasady obowiązku: w wypadkach wyjątkowo ważnych dla życia albo gdy zachodzą okoliczności silnie modyfikujące sytuację typową (Elzenberg, 2002c, s. 276). W tych skrajnych przypadkach musimy pytać szczegółowo: czy to na mocy czystych racji rozumowych lepiej, żeby było, niż nie było, a jeśli tak, to za moją sprawą czy kogoś innego, a jeśli za moją, to w tej chwili czy w jakiejś innej? Co jest oczywiście dużo bardziej niepewne i uciążliwe niż proste odwołanie się do jednej zasady.

3.3. Obowiązek jako wypełnianie nakazów

Wspólnym przekonaniem dla grupy teorii obowiązku, na których teraz skupię swoją uwagę jest to, że obowiązki są w jakiś sposób wtórne względem nakazów. Obowiązki tym różniłyby się od innych nakazów, że miałyby pochodzić od jakiejś woli uprzywilejowanej. Dalszy podział tych teorii polega na wyszczególnieniu, o czyją wolę miałoby chodzić w przypadku obowiązków moralnych. Elzenberg wyróżnia dla tej grupy teorii trzy możliwe warianty, które również poddaje krytyce.

Najprostsza możliwość to utożsamienie normy o obowiązku z jakimś nakazem woli uprzywilejowanej. Norma byłaby po prostu innym sformułowaniem nakazu (Kanger, 1971, s. 45). Jeśli do naszego języka formalnego dołączyć jednoargumentowy operator nakazu jakiegoś uprzywilejowanego normodawcy !, to nakaz możemy reprezentować jako formułę !A, czytając „niech będzie tak, że A!". Można teraz zdefiniować zbiór sytuacji nakazanych przez tegoż wyróżnionego normodawcę: I = {A: !A}. Definicja obowiązku przybiera teraz postać:

$$\mathbf{obw}_I(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. } \mathbf{st}A \in I,$$

a warunek prawdziwości:

$$(M, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{obw_I}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. } [\mathbf{u}]^S \cap [\mathbf{u}]^T \cap |A|^M \in |I|.$$

Bardziej wyrafinowaną formą teorii imperatywistycznej jest uznanie norm o obowiązku nie jako nakazów, ale zdań wyrażających nakazy wyróżnionej woli normotwórczej (Chellas, 1969, s. 1). Stąd definicja obowiązku mogłaby mieć postać:

$$\mathbf{obw_J}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. istnieje } J, J \in I \text{ i } \mathbf{st}A \equiv J,$$

a warunek semantyczny:

$$(M, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{obw_J}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. istnieje } J, |J| \in |I| \text{ i } [\mathbf{u}]^S \cap [\mathbf{u}]^T \cap |A|^M = |J|.$$

Wreszcie trzecia forma teorii imperatywistycznej polega na uznaniu norm o obowiązku jako zdań wynikających logicznie z nakazów wyróżnionej woli normotwórczej (Niiniluoto, 1986, s. 113). Obowiązek znajdowałby sobie uzasadnienie w treści nakazów woli uprzywilejowanej:

$$\mathbf{obw_{IJ}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. istnieje } J_1 ... J_n, J_1 \in I, ..., J_n \in I \text{ i } (J_1 \wedge ... \wedge J_n) \rightarrow \mathbf{st}A,$$

czyli jest obowiązkiem dla podmiotu **s** w chwili **t** sprawić to, że A wtedy i tylko wtedy, gdy sprawienie tego, że A przez podmiot **s** w chwili **t** wynika logicznie z tego, co nakazane przez wyróżnionego normodawcę[9]. Stąd

$$(M, \mathbf{u}) \vDash \mathbf{obw_{IJ}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}, A) \text{ wtw. istnieje } J_1, ... J_n, |J_1| \in |I|, ..., |J_n| \in |I|$$
$$\text{i } (|J_1| \cap ... \cap |J_n|) \subseteq [\mathbf{u}]^S \cap [\mathbf{u}]^T \cap |A|^M.$$

Dlaczego zdaniem Elzenberga teoria obowiązku szukająca jego źródła w nakazach jakiejś woli uprzywilejowanej nie wydaje się właściwa (2005, s. 177–183)? Pierwszą wersję łatwo podważyć, pokazując, że w niektórych przypadkach używamy norm o obowiązku tak, że nie da się ich uznać za innego rodzaju wysłowienia rozkazów. Kiedy na przykład mówimy o obowiązkach jakichś postaci historycznych czy literackich, w ustalonych okolicznościach i czasie, wówczas mówienie o tym, co powinni byli zrobić, ma dla nas sens, ale nakazywanie im, co mają zrobić, sensu już dla nas nie ma.

Druga wersja również jest łatwa do zdyskredytowania. Można się tu posłużyć argumentem analogicznym do testu otwartego pytania G. Moore'a (2004, s. 15–16). Nawet jeśli znajdziemy taką wolę, której nakazy zawsze pokrywają się z naszymi obowiązkami, to i tak możemy zasadnie pytać, czy jest naszym obowiązkiem spełniać to, co nakazane przez tego wyróżnionego normodawcę. Zakresy tego, co nakazane,

9 Jak widać, z formalnego punktu widzenia ta odmiana teorii imperatywistycznej jest szczególnym przypadkiem wcześniej omawianej teorii obowiązku. Treść nakazów woli uprzywilejowanej stanowiłaby zasadę obowiązku.

oraz tego, co obowiązkowe, mogą być równe, ale to, co nakazane, nie wyznacza tego, co obowiązkowe. Pozór słuszności bierze się stąd, że często racji dla spełniania swoich obowiązków szukamy właśnie w nakazach jakichś wyróżnionych normodawców. Strach przed ich karą albo nadzieja nagrody z ich strony potrafią nas skutecznie motywować do spełniania obowiązków.

Skoro obowiązki nie są nakazami ani nie stwierdzają nakazów, to może chociaż znajdują sobie uzasadnienie na gruncie czyichś nakazów? Pytanie tylko, czyja wola mogłaby być ich źródłem. Na pewno kogoś uprzywilejowanego, bo gdyby wola każdego wyznaczała obowiązki, to wówczas każdy mógłby nakazywać, co by chciał, a przez to obowiązki straciłyby całą swoją moc normatywną. A zatem chodzi o wolę kogoś uprzywilejowanego. Może wola kogoś, kto zasługuje na szacunek albo kult? Wówczas jednak mamy do czynienia z nieracjonalnym posłuszeństwem opartym na uczuciu szacunku czy miłości, a stąd nie ma sensu mówienie o obowiązku moralnym. Może więc wola kogoś najsilniejszego, kto potrafi najefektywniej wyegzekwować realizację tego, co sam nakazuje? Niestety, wówczas również nie ma sensu mówienie o obowiązku moralnym, gdyż mamy do czynienia jedynie z uginaniem się przed groźbą sankcji, opartym na uczuciu strachu (powrót do koncepcji obowiązków faktycznych). Może więc wola kogoś, kto zawsze nakazuje to, co w istocie być powinno? Wola, która mówi, co na mocy czystych racji rozumowych lepiej, żeby było, niż nie było, i za sprawą kogo, i w jakiej chwili. Tym sposobem docieramy do woli metaempirycznej. Jak widać więc, same nakazy także nie tłumaczą źródła obowiązku moralnego.

4. Zakończenie

W pracy przedstawiłem zarys koncepcji obowiązku moralnego Henryka Elzenberga. Na obowiązek składają się powinności bytu, sprawcy i terminu. Obowiązkiem jest coś, co być powinno, i coś, co być powinno zrealizowane przez konkretny podmiot, i coś, co być powinno zrealizowane przez ten konkretny podmiot w konkretnej chwili. U podstaw każdej z tych powinności leży relacja preferencji woli metaempirycznej, czyli takiej woli, która przedkłada jedne stany rzeczy nad inne jedynie przez wzgląd na czyste racje rozumowe. Powinne jest to, co jest preferowane przez taką wolę, czyli co lepiej, żeby było, niż nie było ze względu na czyste racje rozumowe. Obowiązkiem jest więc coś, co ze względu na czyste racje rozumowe lepiej, żeby było, niż nie było, i lepiej ze względu na czyste racje rozumowe, żeby było za sprawą tego konkretnego podmiotu aniżeli kogokolwiek innego, i lepiej ze względu na czyste racje rozumowe, żeby było za sprawą tego konkretnego podmiotu w tej konkretnej chwili aniżeli w jakiejkolwiek innej.

Koncepcja Elzenberga okazała swoją atrakcyjność na tle innych teorii obowiązku. Spojrzenie na obowiązek w teorii Elzbenegra jest szersze niż w innych teoriach maksymalizacji, bo każe patrzeć na obowiązek z punktu widzenia wszystkich możliwych światów, a nie tylko możliwych dla danego sprawcy w danej chwili. Stąd można dostrzec, że to, co podmiot może zrobić najlepszego w danych okolicznościach i chwili, może być jednocześnie czymś złym moralnie. Albo może przynieść jeszcze lepsze efekty, o ile zostanie oddane do realizacji komuś innemu lub zostanie zrealizowane przez tego kogoś w innym czasie. Spojrzenie na obowiązek w teorii Elzenberga jest głębsze niż w teoriach, gdzie obowiązek opiera się na pewnej zasadzie. Taka zasada bowiem, choć praktycznie użyteczna, pokazuje jedynie to, co stale współwystępuje z obowiązkiem albo co jest głównym motywem do podejmowania obowiązków. Widać to w sytuacjach granicznych, gdzie zasada obowiązku staje się bezużyteczna i trzeba się odwołać do preferencji woli metaempirycznej. Podobnie w przypadku teorii imperatywistycznych, dla których obowiązek miałby mieć ugruntowanie w nakazach jakiejś woli uprzywilejowanej. Jeśli obowiązek nie miałby polegać na ślepym jej posłuszeństwie lub na strachu przed jej sankcjami, to musiałby się opierać na tym, że wola ta zawsze nakazuje to, co najlepsze w danych okolicznościach dla danego podmiotu w danej chwili, czyli musiałaby być *de facto* wolą metaempiryzną w rozumieniu Elzenberga.

Jak widać, Elzenberg zaproponował ciekawą teorię obowiązku moralnego, której zalety można dostrzec w zestawieniu z innymi teoriami. Na zakończenie trzeba jednak zauważyć, że nawet tak dobra teoria ma swoje trudności w zastosowaniu praktycznym. Niestety nie rozwiązuje ona naszych trudności w rozpoznawaniu, co w danej chwili jest naszym obowiązkiem. Możemy dzięki niej co najwyżej być świadomi, z czego wynikają nasze trudności na tym polu. Chodzi mianowicie o problemy z czystymi racjami rozumowymi. Dla powinności bytu trudność polega na tym, aby całkowicie upodobnić swoją wolę empiryczną do woli metaempirycznej, czyli aby móc się całkowicie wyzbyć względu na własne potrzeby i pragnienia, pytając, co być powinno. Natomiast jeśli chodzi o powinność sprawcy i terminu, to „racje przydzielania i racje oznaczania terminu nigdy nie są dostateczne […] Bo co do przydziału: kwalifikacje danego sprawcy i jego bliskość w stosunku do zdarzenia podlega tylko szacunkowi bardzo aproksymatywnemu. […] Co zaś do terminu, to zasada maksymalizacji byłaby stosowalna, gdybyśmy mogli przewidzieć przyszłość. Gdy jednak tak nie jest, powstają trudności. Jedna znana: nie możemy przewidzieć wszystkich następstw czynu. Ale dalej: nie wiemy, jakim jeszcze czasem rozporządzamy dla realizowania dobra. Ani nikt z nas nie wie, jak długo jeszcze będzie żył [...]; ani nie wiemy tego o ludziach" (Elzenberg, 2002a, 118). Wobec tego jest zawsze tylko prawdopodobne, że coś jest dla kogoś w jakimś momencie obowiązkiem.

Nie powinno nas to jednak zrażać do poszukiwania swoich obowiązków moralnych, bo samo poleganie na obowiązkach faktycznych nie daje gwarancji bycia spełnionym w życiu moralnym, o czym można się przekonać na naszych przykładach literackich.

Chociaż Tonia dwa razy wyszła za mąż zgodnie ze swoją stanową powinnością, to jednak dwa razy doznała bolesnego zawodu. Obaj mężowie, chociaż nominalnie równi jej stanem, to jednak moralnie nie przystawali do swoich wymogów stanowych. Obaj pragnęli przejąć posag Toni: pierwszy, aby spłacać zaciągnięte, niekoniecznie uczciwie, kredyty, a drugi, aby zapewnić sobie przedwczesną emeryturę. Obaj okazali się pozbawieni cech uczciwości, ambicji czy pracowitości tak istotnych dla wyższych sfer kupieckich. Tonia żyła pojęciami epoki, która się właśnie kończyła. Kierowanie się obowiązkami faktycznymi jest możliwe tylko w odpowiednim środowisku społecznym, w którym każdy jest przejęty odgrywanymi przez siebie rolami społecznymi.

Kapitan Ericson zdecydował się pójść za obowiązkiem faktycznym, wbrew normatywnemu. Zrzucił bomby głębinowe, zabijając tym samym rozbitków. Pewnie odegrały tu decydującą rolę jakieś czynniki psychologiczne, przeciw racjom rozumowym: chęć zemsty za te wszystkie storpedowane wcześniej statki, frustracja z powodu braku skuteczności w walce. Niestety był to fatalny wybór. Sygnał echosonaru pochodził od zatopionego statku, który wolno opadał na dno. Rozbitkowie zginęli z rąk tych, którzy mogli dać im ratunek.

Bibliografia

Anderson, A.R. (1956). *Formal Analysis of Normative Systems*. New Haven: Yale University Press.

Chellas, B. (1969). *The Logical Form of Imperatives*. Stanford: Perry Lane Press.

Chellas, B. (1980). *Modal Logic. An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

Darley, J., Latané, B. (1968). Bystander Intervention in Emergencies: Diffusion of Responsibilities. *Journal of Personality and Social Psychology* 8, s. 377–383.

Elzenberg, H. (1986). O tzw. maksymalizacji dobra jako zasadzie obowiązku. *Studia Filozoficzne* 12, s. 29–38.

Elzenberg, H. (1995). *Kilka uwag aksjologiczno-etycznych w związku z fragmentem rozprawy Pricharda*. W: *Z historii filozofii*, red. J. Woroniecki, s. 398–403. Kraków: Wydawnictwo Znak.

Elzenberg, H. (2002a). Zagadnienie obowiązku w aksjologii formalnej. W: *Pisma aksjologiczne*, red. L. Hostyński, A. Lorczyk, A. Nogal, s. 101–122. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej.

Elzenberg, H. (2002b). Podstawowe pojęcia aksjologii I. Wykłady toruńskie 1946–1949. W: *Pisma aksjologiczne*, red. L. Hostyński, A. Lorczyk, A. Nogal, s. 197–257). Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej.

Elzenberg, H. (2002c). Zagadnienia związane z pojęciem wartości. Wykłady 1949. W: *Pisma aksjologiczne*, red. L. Hostyński, A. Lorczyk, A. Nogal, s. 259–303. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej.

Elzenberg, H. (2005). Powinność i rozkaz. W: *Wartość i człowiek. Rozprawy z humanistyki i filozofii*, s. 175–184. Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.

Feldman, F. (1986). *Doing the Best We Can. An Essay in Informal Deontic Logic*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Goble, L. (1990). A Logic of Good, Should and Would. Part I, *Journal of Philosophical Logic* 19 (2), s. 169–199. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/30226425.

Goble, L. (1990). A Logic of Good, Should and Would. Part II, *Journal of Philosophical Logic* 19 (2), s. 253–276. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/30226432.

Goble, L. (1993). The Logic of Obligation, „Better" and „Worse", *Philosophical Studies* 70 (2), s. 133–163. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/BF00989587.

Jarmużek, T., Klonowski, M. (2020). On Logic of Strictly-Deontic Modalites. A Semantic and Tableau Approach. *Logic and Logical Philosophy* 29, s. 335–380. DOI: http://dx.doi.org/10.12775/LLP.2020.010.

Kaczmarski, J. (2012). *Antologia poezji*. Warszawa: Wydawnictwo Demart.

Kanger, S. (1971). New Foundation for Ethical Theory. W: *Deontic Logic. Introductory and Systematic Readings*, red. R. Hilpinen, s. 36–58). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

MacIntyre, A. (2013). *Krótka historia etyki. Filozofia moralności od czasów Homera do XX wieku*. Przeł. A. Chmielewski. Warszawa: PWN.

Magdziak, M. (2019). The Ontologic of Actions. W: *Contemporary Polish Ontology*, red. B. Skowron, s. 219–243. Berlin-Boston: De Gruyter. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110669411.

Mann, T. (1971). *Buddenbrookowie. Dzieje upadku rodziny*. T. 1. Przeł. E. Librowiczowa. Warszawa: Czytelnik.

Monsarrat, N. (1976). *Okrutne morze*. Przeł. A. Knopf. Warszawa: Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej.

Moore, G.E. (2004). *Principia Ethica*. Mineola-New York: Dover Publications.

Niiniluoto, I. (1986). Hypothetical Imperatives and Conditional Obligations. *Synthese* 66 (1), s. 111–133. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/bf00413583.

Sidgwick, H. (1966). *The Methods of Ethics*. New York: Dover Publications.

Smiley, T. (1963). The Logical Basis of Ethics. *Acta Philosophica Fennica* 16, s. 237–245.

Vranas, P. (2007). I Ought, Therefore I Can. *Philosophical Studies* 136 (2), s. 167–216. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/40208771.

Zimmerman, M. (1996). *The Concept of Moral Obligation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Where do moral obligations come from?

Abstract: In this paper I have presented an outline of Henryk Elzenberg's concept of moral obligation. Obligation consists simultaneously of the ought of being, of the agent and of time. An obligation is something that ought to be and something that ought to be realised by a particular agent and something that ought to be realised by that particular agent at a particular moment in time. Underlying each of these oughtnesses is a relation of preference of the meta-empirical will, i.e. of the kind of will that prefers some states of affairs over others only for the sake of pure rational reasons. I have confronted the conception presented here with the theories of moral obligation present in contemporary analytic philosophy. Elzenberg's proposal has shown its attractiveness when compared with theories seeking the basis of obligation in the maximisation of the good, in the fulfilment of the requirements of morality, and in the fulfilment of the imperatives of some favoured will.

Keywords: ought to be, obligation, deontic logic, preference

Wojciech Dzik
University of Silesia (professor emeritus)
Piotr Wojtylak
University of Opole | ORCID: 0000-0003-3328-2385

Basis for passive rules in some first-order logics

To Jan Zygmunt with long-lasting friendship.

Abstract: We characterize unifiable formulas and give a rulebasis fo rall passive rules in some first-order logics, including *n*-valued first-order logics of Łukasiewicz $Ł_n\forall$.

1. Introduction

A rule is passive in alogic L if its premises are not unifiable in L, in symbols, r: $A_1,\ldots, A_n/B$ is passive in L if $\varepsilon[A_1,\ldots,A_n] \subseteq \mathsf{L}$, for every substitution ε. Hence passive rules are always admissible in L but, if the premises are consistent in L, they can be not derivable, for instance if the conclusion is equivalent to the falsum $\bot$.For this reason they were used as examples for showing that some logics are not structurally complete; they often appeared with no names or with other names.

Probably the rules of this kind were first studied by J. Perzanowski (1973), in the context of a "linguistic gap" that leads to structural incompleteness. Passive rules were often studied in modal logic, for instance byJ. Porte in 1981 for S5. Wroński (2009) introduced and studied “overflow rules” which are different but have similarities. In first-order logic Pogorzelski and Prucnal (1975) used a rule (not naming it), which was passive, to prove that 1-st order classical logic with Modus Ponensand Generalization rules is not structurally complete. In Dzik (2004) similar rules in the context of first-order order logic were called “omitting rules”. Passive rules and their bases can very complicated and involved, see Dzik and Wojtylak (2016) for bases in extensions of S4.3. The name “passive rules” were introduced by Rybakov (1990) in his research on modal logics. In Dzik and Wojtylak (2019) an explicit basis for all passive rules for all superintuitionistic predicate logics was given by the schema:

$$\mathrm{P}_{\forall}: \ \frac{\neg\forall_{\bar{z}} C(\bar{z}) \wedge \neg\forall_{\bar{z}} \neg C(\bar{z})}{\bot}$$

In this note we characterize passive rules and provide a rule basis for all passive rules in any first-order logic which contains the “basic” logic L defined below. This applies to *n*-valued first-order logics of Łukasiewicz $Ł_n\forall$. For propositional logics of Łukasiewicz a rule basis for all passive rules was given by E. Jerabek (2010).

2. Logic

We consider a standard first-order language $\{\rightarrow, \neg, \vee, \wedge, \forall, \exists\}$ where function variables are allowed. Let $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{Fm}$ be any consistent logic containing the following axioms (for any formula *A, B, C* and term *t*):

$$(1)\quad A \to (B \to A);$$
$$(2)\quad (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C));$$
$$(3)\quad (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C));$$
$$(4)\quad (B \to \neg A) \to (A \to \neg B);$$
$$(5)\quad \neg B \to (B \to A);$$
$$(6)\quad A \wedge B \to A;\ A \wedge B \to B;$$
$$(7)\quad (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C));$$
$$(8)\quad A \to A \vee B;\ B \to A \vee B;$$
$$(9)\quad (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C));$$
$$(10)\ \forall_x(A \to C(x)) \to (A \to \forall_x C(x));\ \forall_x C(x) \to C(t);$$
$$(11)\ \forall_x(C(x) \to A) \to (\exists_x C(x) \to A);\ C(t) \to \exists_x C(x);$$

closed under substitutions[1] and closed under the inferential rules

1 For the definition of substitution for predicate variables see Church (1956); see also Dzik and Wojtylak (2019).

$$\mathsf{MP}: \frac{A \to B, A}{B} \quad \text{and} \quad \mathsf{RG}: \frac{C(a)}{\forall_x C(x)}$$

(where $C(a) = C[x/a]$ and **RG** is used with the usual eigenvariable condition saying the variable a does not occur in $\forall_x C(x)$).

(1)–(3) are the axioms for Łukasiewicz implication, (4)–(9) are provable in Łukasiewicz logic $Ł_k$ but axioms (1)–(9) of our "basic" logic L are weaker then the axioms of $Ł_k$[2].

Among L-theorems we have

$$A \to A; \neg\neg(A \vee \neg A)$$

$$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C));$$

$$A \to \neg\neg A; \neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$$

$$(B \to A) \to (\neg A \to \neg B);$$

$$A \to (B \to A \wedge B);$$

$$\forall_x(A(x) \to B(x)) \to (\forall_x A(x) \to \forall_x B(x));$$

$$\forall_x(A(x) \to B(x)) \to (\exists_x A(x) \to \exists_x B(x));$$

$$A \vee \forall_x C(x) \to \forall_x(A \vee C(x));$$

$$\forall_x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall_x A(x) \wedge \forall_x B(x).$$

One defines $\vdash_{\mathsf{L}}$ and derives inferential rules, not only theorems. The relation $X \vdash_{\mathsf{L}} A$ holds if A has a formal proof on the ground of $\mathsf{L} \cup X$ using MP and RG as the inferential rules.

Lemma 2.1. *If A is a sentence and $A \vdash_{\mathsf{L}} B$, then $\varepsilon(A) \vdash_{\mathsf{L}} \varepsilon(B)$, for every substitution ε.*

3. Equivalence

One puts $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$ and shows that $\leftrightarrow$ is an equivalence consistent with $\vdash_{\mathsf{L}}$ and congruent with all logical operators. Thus, $\vdash_{\mathsf{L}} A \leftrightarrow A$ and the following rules are L-derivable:

$$\frac{A \leftrightarrow B}{B \leftrightarrow A}; \quad \frac{A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C}{A \leftrightarrow C}; \quad \frac{A \leftrightarrow B, A}{B}; \quad \frac{A \leftrightarrow B}{\neg A \leftrightarrow \neg B};$$

2 We use a symbolic distinction between a propositional logics, say $Ł_n$, and its first-order extension $Ł_n\forall$.

$$\frac{A_1 \leftrightarrow A_2, B_1 \leftrightarrow B_2}{(A_1 \to B_1) \leftrightarrow (A_2 \to B_2)}; \frac{A_1 \leftrightarrow A_2, B_1 \leftrightarrow B_2}{(A_1 \wedge B_1) \leftrightarrow (A_2 \wedge B_2)}; \frac{A_1 \leftrightarrow A_2, B_1 \leftrightarrow B_2}{(A_1 \vee B_1) \leftrightarrow (A_2 \vee B_2)};$$

$$\frac{A(a) \leftrightarrow B(a)}{\forall_x A(x) \leftrightarrow \forall_x B(x)}; \frac{A(a) \leftrightarrow B(a)}{\exists_x A(x) \leftrightarrow \exists_x B(x)}$$

the last two rules occur with the usual restriction on the variables in the formulas. Note that L-derivability of the second rule does not mean L-validity of $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$, nor $(A \leftrightarrow B) \to ((B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C))$. The same concerns the remaining (two-premise) rules. Then

Lemma 3.1. *Let μ and ε be substitutions, $P_1,\ldots, P_n$ be the predicate letters occurring in the formula A and $\overline{x}_1,\ldots, \overline{x}_n$ be strings of distinct variables such that the length of $\overline{x}_i$ equals to the arity of P_i, for $i = 1,\ldots, n$. Then*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \forall_{\overline{x}_i} (\varepsilon(P_i(\overline{x}_i)) \leftrightarrow \mu(P_i(\overline{x}_i))) \vdash_L \varepsilon(A) \leftrightarrow \mu(A).$$

Let $A =_L B$ means $\vdash_L A \leftrightarrow B$. One shows that $=_L$ is a congruence of the algebra of the language and Tarski-Lindenbaum's algebra $\mathsf{F}m/{=_L}$ is a de Morgan lattice with the least and the greatest element (though, the lattice mightbenotdistributive). The lattice ordering in the algebra is induced by

$$A \leq_L B \text{ iff } \vdash_L A \to B$$

Let us take any L-valid formulas as $\top$, to represent the greatest element of the algebra, and put $\bot =_L \neg\top$. One easily shows that $\{\top, \bot\}$ determines a two-element Boolean algebra **2** as a subalgebra of $\mathsf{F}m/{=_L}$. We have

$$\neg A =_L A \to \bot.$$

Asubstitution ε (for predicate variables) is called a *unifier* for a formula A in L, an L-*unifier* for A, if $\vdash_L \varepsilon(A)$. A formula A is *unifiable in* L, or L-*unifiable*, if it has an L-unifier. Unifiable formulas are consistent, that is $\neq_L \bot$, but non-unifiable formulas may also be consistent, e. g. $\exists_x P(x) \wedge \exists_x \neg P(x)$.

Corollary 3.2. *Unifiability is absolute: a formula is unifiable in* L *iff it is unifiable in the classical logic. The unifiability is decidable and it reduces to satisfiability in* **2**. *A first-order formula A is* L*-unifiable iff it has a classical model over one-element domain.*

4. The deduction theorem

Let us define $A \to^n B$ for any $n = 0, 1, \ldots$ taking

$$\begin{cases} A \to^0 B = B \\ A \to^{n+1} B = A \to (A \to^n B) \end{cases}$$

we prove the deduction theorem, see Pogorzelski (1964)

Theorem 4.1. *If A is asentence, then*

$$X, A \vdash_L B \text{ iff } \exists_{n \geq 0} X \vdash_L A \to^n B.$$

Proof: The implication ($\Leftarrow$) is obvious even if A is not a sentence (but a formula with free variables).

($\Rightarrow$) Our argument is inductive with respect to the length of the formal proof of the formula B (on the ground of $X \cup \{A\}$). Note that $B \in X \cup \{A\}$ it suffices to take $n = 0$ or $n = 1$.

(MP). We need to show

$$\frac{A \to^{n_1} (C \to B),\ A \to^{n_2} C}{A \to^{n_1+n_2} B}$$

which is, in turn, an obvious consequence of

$$\frac{A \to^n (C \to B)}{C \to (A \to^n B)} \qquad \frac{A \to^n C,\ C \to B}{A \to^n B}$$

For the first, we need to show $A \to^n (C \to B) =_L C \to (A \to^n B)$. It holds if $n = 1$. Then $A \to^{n+1} (C \to B) =_L A \to (A \to^n (C \to B)) =_L A \to (C \to (A \to^n B)) =_L C \to (A \to^{n+1} B)$.

For the second, we prove $\vdash_L (C \to B) \to ((A \to^n C) \to (A \to^n B))$ inductively by n. It holds if $n = 0, 1$. Then we need

$$(A \to^n C) \to (A \to^n B) \leq_L (A \to^{n+1} C) \to (A \to^{n+1} B)$$

which is quite obvious.

(RG). We need to show

$$\frac{A \to^n C(a)}{A \to^n \forall_x C(x)}$$

which is a consequence of $\forall_x (A \to^n C(x)) \leq_L A \to^n \forall_x C(x)$. Again, we prove it by induction on n. It is obvious if $n = 0$ or $n = 1$. Then

$$\forall_x (A \to^{n+1} C(x)) \quad \leq_L \quad A \to \forall_x (A \to^n C(x)) \quad \leq_L \quad A \to^{n+1} \forall_x C(x)$$

Theorem 4.2. *(i) $X, A \wedge B \vdash_L C$ iff $X, A, B \vdash_L C$.*
(ii) $X \vdash_L A \wedge B$ iff $X \vdash_L A$ and $X \vdash_L B$.

Lemma 4.3. *If A is a sentence and $X, A \vdash_L C$, then $X, A \vee B \vdash_L C \vee B$.* Proof: Let $X, A \vdash_L C$. Then $X \vdash_L A \to^n C$ for some n. We need

$$A \to^n C \leq_L A \vee B \to^n C \vee B$$

It obviously holds if $n = 0$. We proceed by induction on n. So

$$A \to^{n+1} C =_L A \to (A \to^n C) \leq_L A \to (A \vee B \to^n C \vee B).$$

Moreover, we have $\vdash_L B \to (A \vee B \to^n C \vee B)$ which gives

$$A \to^{n+1} C \leq_L A \vee B \to (A \vee B \to^n C \vee B) =_L A \vee B \to^{n+1} C \vee B.$$

Theorem 4.4. *If A and B are sentences, then*

$$X, A \vee B \vdash_L C \ \textit{ iff } \ X, A \vdash_L C \textit{ and } X, B \vdash_L C.$$

Proof: The implication ($\Rightarrow$) is obvious and does not require the assumption that A and B are sentences. To prove ($\Leftarrow$) assume that $X, A \vdash_L C$ and $X, B \vdash_L C$. By the above lemma $X, A \vee B \vdash_L C \vee B$ and $X, B \vee C \vdash_L C \vee C$. Then we get $X, A \vee B \vdash_L C$ as $C \vee C =_L C$ and $C \vee B =_L B \vee C$.

Corollary 4.5. *If B, C are sentences, then $A \wedge (B \vee C) \vdash_L (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.*

The above does not mean that $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ is L-valid. We cannot, either, show the inferential version of (*CD*):

$$\forall_x (A \vee C(x)) \vdash_L A \vee \forall_x C(x).$$

5. Passive rules

The rule *A/B*, where A and B are sentences, is said to be *admissible* in L iff

$$\varepsilon(A) \in \mathsf{L} \Rightarrow \varepsilon(B) \in \mathsf{L}, \text{ for every substitution } \varepsilon.$$

The above means that each L-unifier for A is an L-unifier for B. Since $\vdash_L$ is preserved under substitutions L-derivable rules are L-admissible. A logic L, is *structurally complete* (L $\in$ *SCpl*, see Pogorzelski, 1971) if every L-admissible rule is L-derivable. The rule *A/B* is *passive*, if A is not unifiable. Passiverules are admissible. Since passive rules are defined via (non-)unifiability of their premises, it also follows that the same rule are passive for each logic (of the considered class). The dependence on the logic reappears if we try to identify a reasonable *basis* of passive rules, that is a set of passive rules such that each passive rule is derivable by use of them on the ground of L.

Theorem 5.1. *The following rules form a basis for all passive rules over* L*:*

$$r_n: \quad \frac{(\forall_{\bar{x}} C(\bar{x}) \vee \forall_{\bar{x}} \neg C(\bar{x})) \to^n \bot}{\bot}$$

Proof: We prove that for any non-unifiable A there is $C(\bar{z})$ such that

$$A \vdash_L \forall_x C(\bar{x}) \vee \forall_x \neg C(\bar{x}) \to^n \bot \quad \text{for some } n.$$

Suppose that $\{P_1,\dots, P_n\}$ are the predicate letters occurring in A. Let $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$ be strings of distinct bound variables such that the arity of P_i coincides with the length of $\bar{x}_i$ and $\bar{x}_i$ is disjoint with $\bar{x}_j$ if $i \neq j$. Let ε be the identity substitution (that is $\varepsilon(B) = B$ for each B) and μ be such that $\mu(P_j(\bar{x}_j)) \in \{\top, \bot\}$ for $j = 1,\dots, n$. By Lemma 2.1

$$\forall_{\bar{x}_1} P_1(\bar{x}_1) \leftrightarrow \mu(P_1(\bar{x}_1)) \wedge \cdots \wedge \forall_{\bar{x}_n} (P_n(\bar{x}_n) \leftrightarrow \mu(P_n(\bar{x}_n))) \vdash_L A \leftrightarrow \mu(A))$$

Since $\mu(P_i(\bar{x}_i)))$ can either be $\top$ or $\bot$, and A is not unifiable, we get

$$\forall_{\bar{x}_1} (\neg)P_1(\bar{x}_1) \wedge \cdots \wedge \forall_{\bar{x}_n} (\neg)P_n(\bar{x}_n) \vdash_L A \to \bot$$

where $(\neg)P_i(\bar{x}_i)$ means either $P_i(\bar{x}_i)$ or $\neg P_i(\bar{x}_i)$ depending on μ. Since we can take any possible μ there, then by Theorem 3.4 we get

$$\forall_{\bar{x}_1} P_1(\bar{x}_1) \vee \forall_{\bar{x}_1} \neg P_1(\bar{x}_1) \wedge \dots \wedge (\forall_{\bar{x}_n} P_n(\bar{x}_n) \vee \forall_{\bar{x}_n} \neg P_n(\bar{x}_n) \vdash_L A \to \bot.$$

Let $\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n$ be fresh copies of $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$. Take $\bar{x} = \bar{x}_1, \bar{y}_1,\dots, \bar{x}_n, \bar{y}_n$ and

$$C(\bar{x}) = P_1(\bar{x}_1) \vee \neg P_1(\bar{y}_1) \wedge \dots \wedge P_n(\bar{x}_n) \vee \neg P_n(\bar{y}_n).$$

If we prove $\forall_{\bar{x}_i} \forall_{\bar{y}_i} (P_i(\bar{x}_i) \vee \neg P_i(\bar{y}_i) \vdash_L \forall_{\bar{x}_i} P_i(\bar{x}_i) \vee \forall_{\bar{x}_i} \neg P_i(\bar{x}_i))$ for each i, we get $\forall_{\bar{x}_i} C(\bar{x}_i) \vdash_L A \to \bot$. Since we do not assume L fulfills (CD), we need to prove it by an ad hoc argument. So, let $\bar{a}$ and $\bar{b}$ be two strings of fresh free variables(of the appropriate length). We have:

$$\vdash_L P(\bar{a}) \to (P(\bar{b}) \to P(\bar{a})) \quad ; \quad \vdash_L \neg P(\bar{b}) \to (\neg P(\bar{a}) \to \neg P(\bar{b}))$$

$$\vdash_L \neg P(\bar{b}) \to (P(\bar{b}) \to P(\bar{a})) \quad ; \quad \vdash_L P(\bar{a}) \to (\neg P(\bar{a}) \to \neg P(\bar{b}))$$

$$\vdash_L P(\bar{a}) \vee \neg P(\bar{b}) \to (P(\bar{b}) \to P(\bar{a})); \vdash_L P(\bar{a}) \vee \neg P(\bar{b}) \to (\neg P(\bar{a}) \to \neg P.$$

Thus,

$$\vdash_L \forall_{\bar{x}} \forall_{\bar{y}} (P(\bar{x}) \vee \neg P(\bar{y})) \to (P(\bar{b}) \to P(\bar{a})) \text{ and}$$

$$\vdash_L \forall_{\bar{x}} \forall_{\bar{y}} (P(\bar{x}) \vee \neg P(\bar{y})) \to (\neg P(\bar{a}) \to \neg P(\bar{b}))$$

which gives

$$\vdash_L P(\bar{b}) \to (\forall_{\bar{x}} \forall_{\bar{y}} (P(\bar{x}) \vee \neg P(\bar{y})) \to \forall_{\bar{x}} P(\bar{x})) \text{ and}$$

$$\vdash_L P(\bar{a}) \to (\forall_{\bar{x}} \forall_{\bar{y}} (P(\bar{x}) \vee \neg P(\bar{y})) \to \forall_{\bar{x}} P(\bar{x}))$$

and consequently

$$\vdash_{\mathsf{L}} \forall_{\overline{x}}\forall_{\overline{y}}(P(\overline{x}) \vee \neg P(\overline{y})) \to^2 (\forall_{\overline{x}} P(\overline{x}) \vee \forall_{\overline{x}} \neg P(\overline{x})).$$

Our proof of $\forall_{\overline{x}} C(\overline{x}) \vdash_{\mathsf{L}} A \to \bot$ is concluded. If $\forall_{\overline{x}} C(\overline{x}) \vdash_{\mathsf{L}} \bot$ then

$$\forall_{\overline{x}} C(\overline{x}) \vee \forall_{\overline{x}} \neg C(\overline{x}) \vdash_{\mathsf{L}} A \to \bot$$

and by deduction theorem there is an n such that

$$\forall_{\overline{x}} C(\overline{x}) \vee \forall_{\overline{x}} \neg C(\overline{x}) \to^n \bot.$$

To prove $\forall_{\overline{x}} C(\overline{x}) \vdash_{\mathsf{L}}$, let us notice that

$$\forall_{\overline{x}} \neg C(\overline{x}) \vdash_{\mathsf{L}} \neg \left((P_1(\overline{a}_1) \vee \neg P_1(\overline{a}_1)) \wedge \cdots \wedge (P_n(\overline{a}_n) \vee \neg P_n(\overline{a}_n))\right)$$

where $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ be strings of free variables of the appropriate lengths. But

$$\vdash_{\mathsf{L}} (P_1(\overline{a}_1) \vee \neg P_1(\overline{a}_1)) \to \big((P_1(\overline{a}_2) \vee \neg P_1(\overline{a}_2)) \to \ldots$$
$$\ldots \to ((P_1(\overline{a}_1) \vee \neg P_1(a_1)) \wedge \cdots \wedge P_n(\overline{a}_n) \vee \neg P_n(\overline{a}_n)))\ldots\big)$$

and hence

$$\vdash_{\mathsf{L}} \neg\neg\Big(P_1\big(\overline{a}_1\big) \vee \neg P_1\big(\overline{a}_1\big)\Big) \to \Big(\neg\neg P_1\big(\overline{a}_2\big) \vee \neg P_1\big(\overline{a}_2\big)\Big) \to \ldots$$
$$\ldots \to \neg\neg\Big(\Big(P_1\big(\overline{a}_1\big) \vee \neg P_1\big(\overline{a}_1\big)\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(P_n\big(\overline{a}_n\big) \vee \neg P_n\big(\overline{a}_n\big)\Big)\Big)\ldots\Big)$$

which gives

$$\vdash_{\mathsf{L}} \neg\neg\Big(\Big(P_1\big(\overline{a}_1\big) \vee \neg P_1\big(\overline{a}_1\big)\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(P_n\big(\overline{a}_n\big) \vee \neg P_n\big(\overline{a}_n\big)\Big)\Big)$$

The above theorem has many possible applications; we mention some of them. A logic L, is *almost structurally complete*, $\mathsf{L} \in ASCpl$, see Dzik and Wojtylak (2012), if every L-admissible rule, which is not passive, is L-derivable. In particular, any logic L which enjoys projective unification is almost structurally complete; in this case any L-admissible rule is either L-derivable or passive. If for such L a basis of all passive rules is provided ,then we have

Corollary 5.2. *For any almost structurally complete first-order logic* L' *containing the "basic" logic* L, $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{L}'$, *each* L'*-admissible rule is either* L'*-derivable or it can be derived from the rules* r_n *of theorem 5.1.*

This applies, in particular, to a result of Dzik and Wojtylak (2019) for superintuitionistic first-order logics, for $n = 1$ we get the rule $P_\forall$,that was mentioned in the introduction.

In Dzik (2004), theorem 9, it is shown that any logic that contains n-potent Basic Logic of Hajek enjoys projective unification, and that, in particular, finite-valued logics of Łukasiewicz enjoys projective unification. Thus Łukasiewicz logics $Ł_k$ are almost structurally complete. Jerabekin (2010) uses the result from Dzik (2004) and gives a basis of admissible rules, for any propositional $Ł_k$ consisting of the rules

$$\frac{\neg(p\vee\neg p)^n}{\perp}$$

Moreover he gives a basis for passive rules in Ł$_\infty$, which is not an *ASCpl* logic.

Using the above corollary we have a similar fact for any first-order Łukasiewicz logic Ł$_k\forall$, (where k can be ω).

Corollary 5.3. The rules of the form

$$\frac{(\exists_{\overline{x}}C(\overline{x}))^n,\ (\exists_{\overline{x}}\neg C(\overline{x}))^n}{\perp}$$

constitute a basis for all passive rules in any Łukasiewicz predicate logic Ł$_k\forall$, for all $k\leq\omega$.

Moreover, for all $k<\omega$, any (structural) Ł$_k\forall$-admissible rule is either Ł$_k\forall$-derivable or it can bederived from the above rules.

References

Church, A. (1956). *Introduction to Mathematical Logic.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Dzik, W. (2004). Chains of structurally complete predicate logics with the application of Prucnal's substitution. *Reports on Mathematical Logic*, *38*, 37–48

Dzik, W. (2008). Unification of some substructural logics of BL-algebras and hoops. *Reports on Mathematical Logic*, 43, 73–83.

Dzik,W., and Wojtylak, P. (2012). Projective unification in modal logic. In *Logic Journal of the IGPL*, *20*(1), 121–153.

Dzik, W. and Wojtylak, P. (2016). Modal consequence relations extending **S4.3**: An application of projective unification. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *57*(4), 523–549.

Dzik, W. and Wojtylak, P. (2019). Unification in superintuitionistic predicate logics and its applications. *Review of Symbolic Logic*, *12*(1), 37–61.

Jerabek, E. (2010). Admissible rules of Lukasiewicz logic. *Journal of Logic and Computation*, *20*(2), 425–447.

Perzanowski, J. (1973). The linguistic criterion of structural incompleteness. *Reports on Mathematical Logic*, *1*, 13–14.

Pogorzelski, W.A. (1964). The deduction theorem for Lukasiewicz many-valued propositional calculi. *Studia Logica*, *15*, 7–23.

Pogorzelski, W.A. (1971). Structural completeness of the propositional calculus. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, *19*, 349–351.

Pogorzelski, W.A. and Prucnal, T. (1975). Structural completeness of the first-order predicate calculus. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, *21*, 315–320.

Prucnal, T. (1972). Structural completeness of some pure implicational propositional calculi. *Studia Logica*, *30*, 45–51.

Rasiowa, H. and Sikorski, R. (1963). *The Mathematics of Metamathematics*. Warszawa: PWN.

Rybakov, V. V. (1990). Logical equations and admissible rules of inference with parameters in modal provability logics. *Studia Logica*, *49*, 215–239.

Wroński, A. (1995). Transparent unification problem. *Reports on Mathematical Logic*, *29*, 105–107.

Wroński, A. (2009). Overflow rules and a weakening of structural completeness. In J. Sytnik-Czetwertyński (Ed.), *Rozważania o filozofii prawdziwej. Jerzemu Perzanowskiemu w darze* (pp. 67–71). Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Janusz Kaczmarek
Uniwersytet Łódzki | ORCID: 0000-0002-6634-1401

Algebraiczne i topologiczne uwagi do niektórych pojęć atomizmu logicznego

Abstrakt: W pracy z roku 1988 *O kratach warunkowo dystrybutywnych* Jacek Hawranek i Jan Zygmunt zaprezentowali algebraiczną analizę pojęcia ‘kraty warunkowo dystrybutywnej’ wprowadzonego przez Bogusława Wolniewicza. Pojęcie to pojawiło się między innymi. w jednym z aksjomatów dla krat zaproponowanych przez Wolniewicza, w których interpretuje się ontologię Ludwiga Wittgensteina zawartą w jego *Tractatus*. W niniejszej pracy dokonuję analizy podstawowych pojęć które wprowadził Wolniewicz i wykorzystał do interpretacji głównych tez atomizmu Wittgensteina, by wyjaśnić podstawowy paradygmat (istotę) atomizmu z *Tractatus*. Podejmuję również kwestię topologicznego ujęcia krat Wolniewicza, uogólnienia do przeliczalnej liczby wymiarów oraz ujęcia głównych pojęć w języku topologii ogólnej.

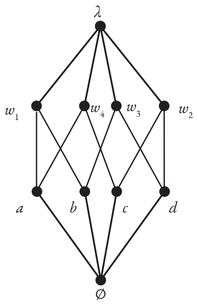
1. Interpretacja atomizmu logicznego Wittgensteina w kratach Wolniewicza

W roku 1921 ukazała się praca Ludwiga Wittgensteina *Tractatus logico-philosophicus*. Jest to jedno z najbardziej doniosłych dzieł filozofii XX wieku, w którym proponuje się między innymi (bo innych wątków jest tam wiele) ontologię atomizmu logicznego zawartą w punktach od 1. do 2.063 (por. Glock, 2001, s. 352–354). W roku 1980 i 1982 pojawiły się pierwsze prace Bogusława Wolniewicza (1980; 1982), w których przedstawiono formalną interpretację ontologii Wittgensteina za pomocą teorii krat. Wolniewicz uzasadnia (por. Wolniewicz, 1985), że kluczowe aksjomaty teorii krat, które budują ontologię Wittgensteina, to aksjomaty: (1.8)–(1.10). Wolniewicz pisze:

Aksjomaty (1.8)–(1.10) streszczają filozofię *logicznego atomizmu*. Czymkolwiek bowiem w rozumieniu Russella były jego „atomy logiczne”, to w każdym razie miały im przysługiwać dwie własności: prostota i wzajemna niezależność. Aksjomat (1.8) stwierdza właśnie, że w zbiorze sytuacji elementarnych sytuacje atomowe są proste: żadna z nich nie da się przedstawić jako splot [tj. kres górny – przyp. J.K.] dwu innych i różnych od niej sytuacji elementarnych. Natomiast ze względu na aksjomaty (1.9) i (1.10) sytuacje atomowe są od siebie niezależne [...]. (Wolniewicz, 1985, s. 32)

Przypomnimy te aksjomaty i skomentujemy je, ale wcześniej wprowadzę pewne intuicje dotyczące krat zaproponowanych przez Wolniewicza poprzez prosty przykład.

Rozważmy kratę:



Rys. 1. Krata o sygnaturze (2, 2) z dwoma wymiarami: $D_1 = \{a, d\}$ z dwoma elementami oraz $D_2 = \{b, c\}$ również z dwoma elementami (Wolniewicz, 1985, s. 36)[1]

Kratę definiujemy zwykle w sposób algebraiczny jako strukturę o sygnaturze <2, 2> na pewnym niepustym zbiorze $\boldsymbol{K}$, tj. z dwoma działaniami dwuargumentowymi: sumą kratową ∨ i iloczynem kratowym ∧ bądź w sensie częściowych porządków z porządkiem ≤. Zachodzi wówczas związek: $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$. W kracie na Rys. 1 dla dowolnego $x \in \boldsymbol{K}$, $\emptyset \leq x \leq \lambda$. Ponieważ $x \vee x = x$, więc $x \leq x$. Sumę dwóch elementów możemy traktować jak kres górny tych elementów, natomiast ich iloczyn jako kres dolny. Mamy zatem: $x \vee y = \sup(x, y)$ oraz $x \wedge y = \inf(x, y)$. Elementy ∅ i λ to odpowiednio zero i jedynka kraty. Pierwszy z nich Wolniewicz nazywa sytuacją elementarną pustą, drugi zaś sytuacją elementarną niemożliwą. Wszystkie pozostałe

1 Uwaga: dokonałem tu drobnej modyfikacji w przedstawieniu rysunku Wolniewicza.

elementy kraty (oznaczane symbolem *SE*") to tzw. sytuacje elementarne właściwe lub przypadkowe, natomiast zbiór *SE*" ∪ {∅} to zbiór tzw. elementarnych sytuacji możliwych. Elementy znajdujące się bezpośrednio nad ∅ (technicznie: każdy z tych elementów *pokrywa* ∅) nazywane są atomami kraty, a ich zbiór oznacza Wolniewicz symbolem *SA*. Dowolne dwa atomy, których kres górny to element λ, tworzą (stanowią) tzw. wymiar. Tak więc mamy w powyższej kracie dwa wymiary: $D_1 = \{a, d\}$, $D_2 = \{b, c\}$. Jeśli za Wolniewiczem zinterpretujemy, że odpowiednie atomy: a, d, b, c oznaczają proste stany pogodowe (atomowe elementarne sytuacje albo atomowe stany rzeczy): 'jest zimno', 'jest ciepło', 'jest sucho', 'jest mokro', to element w_1 możemy zinterpretować jako 'jest zimno i sucho'. Taka maksymalna sytuacja elementarna właściwa nazywana jest możliwym światem, a zbiór wszystkich możliwych światów nazywany jest przestrzenią logiczną. Mamy więc powyżej cztery możliwe światy, natomiast nie ma świata, w którym zrealizowałby się stan rzeczy: 'jest zimno i ciepło'. Kres górny bowiem atomów a i d to element λ, czyli sytuacja niemożliwa. W ogólności Wolniewicz przyjmuje, że w jego kratach jest skończona ilość wymiarów, ale w każdym wymiarze może być dowolna ilość atomów (skończona bądź nieskończona) większa lub równa 2. Oznacza to, że takie kraty są zawsze skończonej wysokości, ale mogą być nieskończenie szerokie. Adekwatną dla ontologii Wittgensteina jest taka krata, która w każdym wymiarze posiada dwa różne atomy.

Podajmy teraz wspomniane aksjomaty.

(1.8) Krata sytuacji elementarnych *SE* jest atomistyczna, tj. (a) zbiór atomów

$$SA = \{x \in SE\colon x \text{ pokrywa } \emptyset\} \neq \emptyset$$

oraz (b)

$$\forall\, x \in SE\ \exists\, A \subseteq SA : x = \sup A,$$

co znaczy, że dowolna sytuacja elementarna jest kresem górnym pewnego zbioru atomów, w szczególności zero kraty jest kresem górnym zbioru pustego, a jedynka kraty kresem górnym dwóch różnych atomów z tego samego wymiaru.

(1.9) Właściwe sytuacje elementarne są niezgodne wtedy i tylko wtedy, gdy zawierają niezgodne atomy[2], tj. dla dowolnych $x, y \in SE$, jeśli tylko $x \neq \emptyset$ lub $y \neq \lambda$ bądź odwrotnie $x \neq \lambda$ lub $y \neq \emptyset$, mamy:

$$x \vee y = \lambda \Rightarrow \exists\, a, b \in SA\ (a \leq x,\ b \leq y \text{ i } a \vee b = \lambda).$$

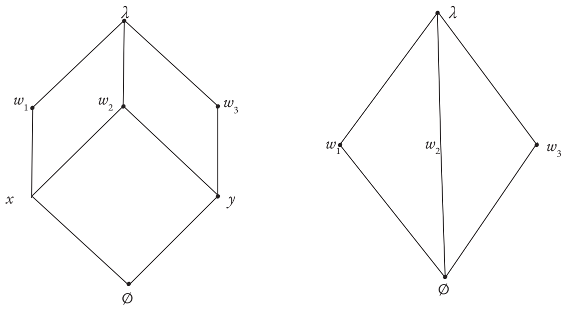
2 Mówimy, że dwie sytuacje x, y są zgodne (współmożliwe) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka sytuacja właściwa z, że $x \leq z$ oraz $y \leq z$ (czytamy też: x zachodzi w z oraz y zachodzi w z). Jeśli tak nie jest, sytuacje x, y są niezgodne.

(1.10) Aksjomat ten wyrazimy wykorzystując operację kresu górnego następująco:

$$\forall\, x, y, z \in SA\ ((\sup(x, z) = \lambda \text{ i } \sup(y, z) = \lambda), \text{ to } (x = y \text{ lub } \sup(x, y) = \lambda)).$$

Istotnie, widzimy już teraz, że warunek (1.8) gwarantuje, iż każdą sytuację właściwą można rozumieć jako kres górny pewnego zbioru atomów z różnego wymiarów każdy, natomiast sytuacja atomowa nie: sytuacja atomowa jest co najwyżej kresem górnym samej siebie. Na tym ma polegać prostota atomów. Natomiast bardziej skomplikowana jest sprawa niezależności atomów. Wolniewicz wprowadza pojęcie 'zbioru W-niezależnego' (Wolniewicz, 1985, s. 32): niepusty zbiór A sytuacji elementarnych jest *W-niezależny* wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup A \neq \lambda$ i dla dowolnych elementów x i y zbioru A $\inf(x, y) = \emptyset$. Aksjomat (1.9) wyraża fakt, że dwie sytuacje właściwe x i y są niezgodne, a więc $\sup(x, y) = \lambda$, co oznacza, że są one W-zależne (nawet, jeśli $\inf(x, y) = \emptyset$). Co więcej, na dalszych stronach *Ontologii sytuacji* Wolniewiczowi chodzi przede wszystkim o zinterpretowanie niezależności atomów. Już warunek (1.9) pokazuje, że niezgodność sytuacji polega na niezgodności co najmniej dwóch atomów, natomiast warunek (1.10) pokazuje, co się dzieje w jednym wymiarze kraty: jeśli w danym wymiarze mamy co najmniej dwa elementy, to ewentualny trzeci atom w tym wymiarze (bądź kolejny) albo jest równy jednemu z nich, albo w kresie górnym daje z nim sytuację niemożliwą (sprzeczną). Oznacza to, że różne atomy jednego wymiaru są W-zależne. W-niezależne są jedynie atomy z różnych wymiarów.

Wolniewicz rozważa również następujące przykłady krat (Wolniewicz, 1985, s. 81):



Rys. 2.

Obie kraty są przykładami tzw. krat rozdzielonych, co oznacza, że dla dowolnych różnych sytuacji elementarnych x i y można wskazać taki świat, że pierwsza w nim zachodzi, a druga nie lub odwrotnie. Krata po lewej stronie nie jest atomistyczna, bo np. w_1 nie jest kresem górnym pewnych atomów. Jest jednak atomowa (posiada atomy) i atomy x, y są W-niezależne. Natomiast krata po prawej stronie jest atomistyczna, jej atomy są jednocześnie możliwymi światami. Widoczne jest też, że w kracie tej mamy jeden wymiar złożony z trzech atomów, przy tym atomy te są W-zależne. Krata po prawej stronie jest też przykładem kraty modularnej, niedystrybutywnej, ale warunkowo dystrybutywnej[3]. Ten ostatni warunek jest jednym z aksjomatów krat wprowadzonych przez Wolniewicza (1985, s. 24). Dodajmy też, że rozpatrywana przez J. Hawranka i J. Zygmunta krata N_5 jest kratą nierozdzieloną w sensie Wolniewicza (Hawranek, Zygmunt, 1988, s. 64).

2. O pewnym topologicznym rozszerzeniu krat Wolniewicza

Okazuje się, że kraty wprowadzone przez Wolniewicza można również rozważać w języku topologii ogólnej. Przypomnijmy kilka podstawowych pojęć topologicznych.

Niech X będzie dowolnym zbiorem, a $\boldsymbol{P}(X)$ rodziną podzbiorów zbioru X. Wówczas parę $(X, \boldsymbol{P}(X))$ nazywamy przestrzenią topologiczną wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $\boldsymbol{P}(X)$ spełnia następujące warunki: (I) zbiór pusty $\emptyset$ oraz zbiór X należą do $\boldsymbol{P}(X)$, (II) suma dowolnej ilości zbiorów z $\boldsymbol{P}(X)$ należy do $\boldsymbol{P}(X)$, (III) iloczyn skończonej ilości zbiorów z $\boldsymbol{P}(X)$ należy do $\boldsymbol{P}(X)$. Przykładami przestrzeni topologicznych są:

2.1) tzw. przestrzeń antydyskretna, to jest para $(X, \{\emptyset, X\})$;

2.2) tzw. przestrzeń dyskretna, to jest para $(X, 2^X)$, gdzie 2^X to rodzina wszystkich podzbiorów zbioru X;

2.3) tzw. przestrzeń euklidesowa (lub naturalna) określona na zbiorze liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$ z rodziną zbiorów zawierającą przedziały liczbowe postaci (a, b), dla $a, b \in \boldsymbol{R}$ i $a < b$ oraz dowolne sumy takich przedziałów.

Uwaga. Jeśli określona jest przestrzeń topologiczna na zbiorze X, to zbiory należące do $\boldsymbol{P}(X)$ nazywamy zbiorami otwartymi, ich dopełnienia zaś zbiorami domkniętymi. Są to szczególne definicje. Zauważmy, że $\emptyset$ i X są zbiorami i otwartymi i domkniętymi w każdej przestrzeni. W przestrzeni dyskretnej każdy zbiór jest otwarty i domknięty, natomiast tzw. przedział otwarto-domknięty, na przykład $(0; 2\rangle$ nie jest w przestrzeni euklidesowej ani otwarty, ani domknięty (gdybyśmy

3 Szczegółowe analizy tych kwestii, a także innych, jak warunkowa modularność, przeprowadzone były przez J. Hawranka i J. Zygmunta w artykule: Hawranek, Zygmunt, 1988.

jednak na $\boldsymbol{R}$ określili topologię dyskretną, to byłby i otwarty i domknięty zarazem).

Niech teraz $\boldsymbol{B}$ będzie dowolną (skończoną lub nieskończoną) rodziną zbiorów. Rodzinę $\boldsymbol{B}$ nazywamy bazą przestrzeni topologicznej $(X, \boldsymbol{P}(X))$ wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny niepusty zbiór z $\boldsymbol{P}(X)$ można przedstawić jako sumę pewnej ilości zbiorów z $\boldsymbol{B}$.

Można zauważyć, że kratę Wolniewicza można potraktować jako ‘układ’, ‘strukturę’ złożoną z dyskretnych przestrzeni topologicznych. Oto w kracie na Rys. 1 potraktujmy zero kraty jako zbiór $\emptyset$, zamiast elementów (atomów) a, b, c, d rozważmy singletony $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, a możliwe światy będziemy rozumieli jako sumy odpowiednich atomów (singletonów), na przykład $w_1 = \{a, b\}$, to para $(\{a, b\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\})$ jest dyskretną przestrzenią topologiczną na zbiorze $\{a, b\}$. Łatwo zauważyć, że kratę wskazaną na diagramie Rys. 1 można potraktować jako złożoną z czterech przestrzeni topologicznych określonych odpowiednio na zbiorach: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ i $\{c, d\}$. W takiej kracie $\sup(A, B) = A \cup B$ (z jednym wyjątkiem: gdy określamy sumę dwóch zbiorów A, B, które zawierają atomy niezgodne, wówczas zawsze – oczywiście w przypadku rozpatrywanej kraty – $A \cup B = \{a, b, c, d\}$), a $\inf(A, B) = A \cap B$. Porządek w takiej kracie jest wyznaczony przez inkluzję niewłaściwą: $\subseteq$.

W pewnych pracach przedstawiałem uogólnioną kratę, w której rozważałem nieskończenie wiele wymiarów z dopuszczeniem w każdym wymiarze dowolnej ilości atomów (Kaczmarek, 2012, 2019, 2022). Tu wskażę konstrukcję, która odchodzi od założenia Wolniewicza o skończonej ilości wymiarów (Wolniewicz, 1985, s. 28)[4] — wymiarów będzie przeliczalnie wiele, ale pozostanę przy intencji Wittgensteina i Wolniewicza, by założyć, że w każdym wymiarze mamy dwa atomy-singletony.

Niech $\boldsymbol{A} = \{A_1, A_2, A_3, ...\}$ będzie przeliczalną rodziną zbiorów I dla dowolnego A_i, $\mathrm{card}(A_i) = 2$. Przyjmijmy dodatkowo, że dla dowolnych różnych A_i, A_j, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Każdy zbiór A_i będzie rozumiany jako zbiór złożony z dwóch singletonów, to jest atomów. Dla przykładu, dla pewnego i $A_i = \left\{\left\{a_{i_1}\right\}, \left\{a_{i_2}\right\}\right\}$. Rozważamy A_i jako wymiar, a zatem ma on się składać z atomów niezgodnych. Rozważmy następnie funkcję f określoną na zbiorze liczb naturalnych $\boldsymbol{N}$ taką, że $f(i) \in A_i$. Funkcja f jest różnowartościowa, a zbiór $f(\boldsymbol{N})$ jest zbiorem, w którym występują elementy po jednym z każdego ze zbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Zbiór możemy

4 Wolniewicz zauważa tu, że jego założenie o skończonej liczbie wymiarów jest arbitralne, a czyni tak jedynie ze względu na zmniejszenie trudności czysto matematycznych.

więc potraktować jako bazę dla pewnej (dyskretnej) przestrzeni topologicznej (istotnie, tak wygenerowana przez bazę przestrzeń topologiczna zawiera wszystkie podzbiory zbioru $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, gdzie $a_i \in f(i)$. Przy tych założeniach widoczne jest, że możemy w ten sposób wygenerować 2^ω różnych przestrzeni topologicznych. Chcąc połączyć te wszystkie przestrzenie topologiczne w strukturę kraty, postąpimy następująco: oznaczmy nośniki tych przestrzeni topologicznych przez X_r, dla $r \in \boldsymbol{R}$, odpowiednią rodzinę zbiorów jako $P(X_r)$, a sumę wszystkich nośników jako X. Wówczas kres górny $\underline{\cup}$ dwóch różnych zbiorów S_i i S_j określamy następująco:

(sup) $S_i \,\underline{\cup}\, S_j = S_i \cup S_j$, gdy zbiory S_i i S_j nie zawierają dwu różnych elementów z singletonów w tym samym wymiarze,

$S_i \,\underline{\cup}\, S_j = X$, w przeciwnym wypadku

(inf) $S_i \,\underline{\cap}\, S_j = S_i \cap S_j$, (w każdym przypadku).

Wniosek. Suma wszystkich zbiorów (rodzin) postaci $P(X_r)$ wraz ze zbiorem pustym i zbiorem X jest kratą z operacjami $\underline{\cup}$ i $\underline{\cap}$. Operacja jest zwykłym przekrojem $\cap$. Inaczej jest z operacją $\underline{\cup}$, co widać po definicji.

Zauważmy, że zdefiniowana tu krata jest warunkowo dystrybutywna, atomiczna (także atomowa) i rozdzielona. Przy interpretacji topologicznej proponuję rozumieć możliwy świat nie jako element maksymalny, ale jako przestrzeń topologiczną dyskretną określoną na tym elemencie maksymalnym (nośniku przestrzeni topologicznej). Przy takim ujęciu pojęcie możliwego świata przypomina pojęcie tzw. *realizacji*, które wprowadzone było przez J. Łosia (1960).

Zaangażowanie topologii ogólnej pozwala nieco inaczej (choć równoważnie) zdefiniować niektóre pojęcia. Niezależność zbioru sytuacji polega na tym, że ich suma (kres górny) należy do pewnej przestrzeni topologicznej, natomiast przekrój dowolnych dwóch zbiorów z tego rozważanego zbioru jest zbiorem pustym. Zgodność sytuacji to przynależność ich do wspólnej przestrzeni topologicznej. Kres górny, w przypadku zgodnych sytuacji właściwych, jest zwykłą sumą teoriomnogościową, zaś kres dolny różnych sytuacji to ich część wspólna (co można interpretować następująco: pewne sytuacje właściwe, choć różne, mogą nieść pewne ‘wspólne informacje’).

I na koniec zauważmy, bez wprowadzania szczegółów topologicznych, że wszystkie możliwe światy w sensie topologicznym są homeomorficzne (a więc strukturalnie identyczne). Co więcej, ponieważ nasze przestrzenie topologiczne — możliwe światy — są określone dla przeliczalnych nośników, to można wskazać wiele podprzestrzeni topologicznych danej przestrzeni, które są z ową przestrzenią homeomorficzne. Można zatem zinterpretować to ontologicznie: możliwe światy są topologicznie równoważne pewnym swoim fragmentom, fragmentom tych światów. Oczywiście to ostatnie nie zachodzi w skończonych strukturach Wolniewicza.

Bibliografia

Glock, H.J. (2001). *Słownik Wittgensteinowski*. Przeł. M. Hernik, M. Szczubiałka. Warszawa: Spacja.

Hawranek, J., Zygmunt, J. (1988). O kratach warunkowo dystrybutywnych. *Acta Universitatis Wratislaviensis* No 1070, *Prace Filozoficzne* LVII (*Logika* 13), s. 63–72.

Kaczmarek, J. (2012). Two Types of Ontological Structure: Concepts Structures and Lattices of Elementary Situations. *Logic and Logical Philosophy* 21 (2), s. 165–174.

Kaczmarek, J. (2019). Ontology in *Tractatus Logico-Philosophicus*. A Topological Approach. W: *Philosophy of Logic and Mathematics: Proceedings of the 41st International Ludwig Wittgenstein Symposium*, red. G.M. Mras, P. Weingartner, B. Ritter, s. 246–262. Berlin-Munich-Boston: De Gruyter.

Kaczmarek, J. (2022). The Four-Category Ontology modulo Topological Ontology. W: *E.J. Lowe and Ontology*, red. M. Szatkowski, s. 143–164. New York-London: Routledge.

Łoś, J. (1960). O ciałach zdarzeń i ich definicji w aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa. *Studia Logica* 9, s. 95–132.

Wittgenstein, L. (1997). *Tractatus logico-philosophicus*. Przeł. B. Wolniewicz. Warszawa: PWN.

Wolniewicz, B. (1980). On the lattice of elementary situations. *Bulletin of the Section of Logic* 9 (3), s. 115–121.

Wolniewicz, B. (1982). A formal ontology of situations. *Studia Logica* 41 (4), s. 381–413.

Wolniewicz, B. (1985). *Ontologia sytuacji*. Warszawa: PWN.

Algebraic and topological remarks on some concepts of logical atomism

Abstract: In his papers from 1980 and 1982, B. Wolniewicz proposed an interpretation of Wittgenstein's ontology from the Tractatus Logico-Philosophicus. In 1985, Wolniewicz published a monograph that comprehensively covered Wittgenstein's version of the ontology of logical atomism. In 1988, J. Hawranek and J. Zygmunt presented an algebraic analysis of the concept of a conditionally distributive lattice introduced by Wolniewicz. In this paper, I analyze the basic concepts introduced by Wolniewicz and additionally show that these concepts can be expressed in the language of general topology. In this way, I extend Wolniewicz's lattices to lattices constructed from an infinite number of dimensions. I describe this in the language of topology.

Marcin Łazarz
Uniwersytet Wrocławski | ORCID: 0000-0003-0022-2730

O pojęciu uzupełnienia i kratach zupełnie normalnych

1. Wprowadzenie

Rodowodu pojęcia uzupełnienia należy się dopatrywać w logice i ontologii. Prawa logiki klasycznej, prawo wyłączonego środka $p \vee \neg p$ oraz niesprzeczności $\neg(p \wedge \neg p)$, głoszą, że zdania p oraz $\neg p$ się wzajemnie uzupełniają. Prawa te przeniesione na grunt teorii mnogości stwierdzają, że zbiór A oraz jego dopełnienie (do z góry zadanego zbioru X) $A' = \{x \in X : x \notin A\}$ dopełniają się wzajemnie, czyli $A \cup A' = X$ oraz $A \cap A' = \varnothing$. W ontologii uzupełnienie rozumiane jest podobnie: sytuacja oraz jej uzupełnienie splatają się do całości bytu i nigdzie się nie stykają (Wolniewicz, 1985, s. 24).

Formalizacja pojęcia uzupełnienia znajduje swoje naturalne miejsce w teorii algebr Boole'a. *Algebrą Boole'a* nazywamy strukturę $\boldsymbol{A} = (A, \wedge, \vee, -, 0, 1)$, która między innymi spełnia dwa aksjomaty

$$a \vee -a = 1 \text{ oraz } a \wedge -a = 0.$$

Element $-a$ nazywamy *uzupełnieniem* elementu .

Rozwój logiki intuicjonistycznej, która odrzuca prawo wyłączonego środka, doprowadził do modyfikacji pojęcia uzupełnienia, a tym samym do struktury zwanej *algebrą Heytinga* (kratą Heytinga lub algebrą pseudoboole'owską) (Balbes i Dwinger, 1974, s. 173), czyli struktury $\boldsymbol{L} = (L, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$, w której zachodzi:

$$x \leq a \rightarrow b \Leftrightarrow a \wedge x \leq b.$$

W algebrach Heytinga definiowalne jest w szczególności pojęcie *pseudouzupełnienia* elementu a, jako $a^* = a \rightarrow 0 = \max\{x \in L : a \wedge x = 0\}$. Przedrostek „pseudo" tłumaczy się tym, że równość $a \vee a^* = 1$ (odpowiednik logicznego prawa wyłączonego środka) w algebrach Heytinga zachodzić nie musi.

W algebrze i teorii krat wiele uwagi poświęcono rozmaitym klasom struktur z uzupełnieniem (to jest, gdzie jakaś modyfikacja pojęcia uzupełnienia ma sens), w szczególności wyróżniamy:

- kraty komplementarne (każdy element a posiada co najmniej jedno uzupełnienie b, to jest $a \vee b = 1$ i $a \wedge b = 0$),
- kraty relatywnie komplementarne (każdy przedział $[a, b]$ jest kratą komplementarną; elementy 0 i 1 mogą nie istnieć),
- kraty relatywnie pseudokomplementarne (dla dowolnych elementów a, b istnieje $a \rightarrow b$),
- kraty pseudokomplementarne (każdy element a posiada pseudouzupełnienie a^*),
- kraty ortokomplementarne (każdy element a posiada tzw. ortouzupełnienie $a^\perp$),
- i inne (Stern, 1999, rozdział 1.5).

Warto dodać, że polski filozof Bogusław Wolniewicz, motywowany kwestiami ontologicznymi, wprowadził (1985, s. 27) ciekawe kraty z uzupełnieniem, przyjmując dla swojej ontologii sytuacji następujący aksjomat:

(W) $\left(\forall a, b \in L \setminus \{0,1\}\right)\left(a \vee b = 1 \Rightarrow \left(\exists x, y \in At\right)\left(x \leq a \;\&\; y \leq a \;\&\; x \vee y = 1\right)\right)$

W niniejszej pracy skupimy się pojęciu uzupełnienia, które pojawia się w kontekście krat określanych mianem *zupełnie normalnych* (ang. *completely normal*). Pojęcie kraty zupełnie normalnej znane było już w latach pięćdziesiątych XX w. (Monteiro, 1954)[1], jednakże współcześnie badania nabrały nowej dynamiki (Wehrung, 2020; Ploščica, 2021). Kratę z zerem $\boldsymbol{L} = (L, \vee, \wedge, 0)$ nazywamy *zupełnie normalną* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek:

(CN) $\left(\forall a, b \in L\right)\left(\exists x, y \in L\right)\left(a \vee b = a \vee y = x \vee b \;\&\; x \wedge y = 0\right).$

---

1 Warto dodać, że oryginalna definicja była dualna: na stronie 139 znajdujemy: „Kratę R nazwiemy *normalną*, jeśli jest dystrybutywna oraz spełnia następujący aksjomat: dla dowolnych a, b, u takich, że $a \wedge b = 0$ i $a \vee b \leq u$ istnieją elementy x, y takie, że $a \wedge y = x \wedge b = 0$ oraz $x \vee y = u$".

W rozdziale 6 scharakteryzujemy powyższy aksjomat, podając warunek jemu równoważny i zdecydowanie bardziej operatywny. Nasza charakteryzacja uogólnia nieco twierdzenie, które było znane wcześniej dla krat dystrybutywnych (Ploščica, Wehrung, 2025, s. 211; Monteiro, 1974, s. 84, twierdzenie 4.2). Mówiąc dokładniej, istotna implikacja naszej charakteryzacji (Twierdzenie 2) zachodzi dla skończonych krat 0-dystrybutywnych i półdystrybutywnych.

2. Preliminaria

Podstawowe pojęcia teorio-kratowe można znaleźć w licznych podręcznikach (Birkhoff, 1948; Balbes i Dwinger, 1974; Grätzer, 1978; w języku polskim: Walendziak, 2009). Dla wygody Czytelnika przywołamy tutaj ważniejsze definicje i fakty.

Dla zwięzłości będziemy pisać „krata" zamiast „krata $\boldsymbol{L} = (L, \vee, \wedge)$". Element najmniejszy oraz największy kraty L (jeśli istnieją) oznaczać będziemy odpowiednio przez 0 oraz 1. Standardowo relację kratową definiujemy:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Piszemy $a < b$, gdy $a \leq b$ oraz $a \neq b$. Symbol $a \prec b$ oznacza, że $a < b$ i nie istnieje element c taki, że $a < c < b$. Dalej, pisząc $a \parallel b$, mamy na myśli, że $a \not\leq b$ i $b \not\leq a$. Element a nazwiemy $\vee$-*nierozkładalnym*, gdy zachodzi

$$(\forall x, y \in L)(a = x \vee y \Rightarrow (a = x \text{ lub } a = y)).$$

Zbiór elementów $\vee$-*nierozkładalnych* kraty L oznaczamy symbolem $J(L)$.

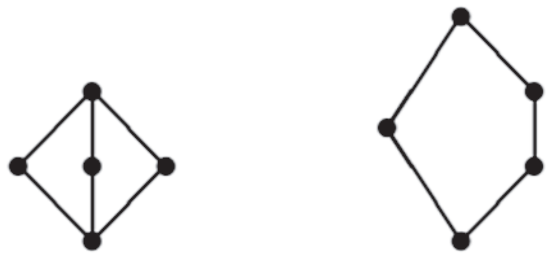
Kratę nazywamy:

- *modularną*, gdy $(\forall a,b,c \in L)(a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c)$,
- *dystrybutywną*, gdy $(\forall a,b,c \in L)(a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c))$,
- *komplementarną*, gdy posiada element najmniejszy 0, największy 1 oraz spełnia: $(\forall a \in L)(\exists b \in L)(a \vee b = 1 \,\&\, a \wedge b = 0)$,
- *półdystrybutywną*, gdy $(\forall a,b,c \in L)(a \vee b = a \vee c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = a \vee b)$,
- *0-dystrybutywną*, gdy posiada element najmniejszy 0 oraz spełnia: $(\forall a,b,c \in L)(a \wedge b = a \wedge c = 0 \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = 0)$
- *pseudokomplementarną*, gdy posiada 0 oraz dla dowolnego a istnieje element a^* taki, że $(\forall x \in L)(x \leq a^* \Leftrightarrow a \wedge x = 0)$.

- *Boole'owską*, gdy jest dystrybutywna i komplementarna.

Fakt 1 [Dedekind-Birkhoff]. (I) *Krata jest modularna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podkraty izomorficznej z N_5.*

(II) *Krata jest dystrybutywna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ani N_5, ani M_3* (Grätzer, 1978, s. 59–60).

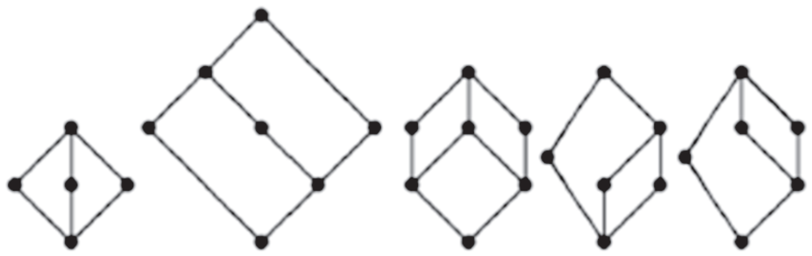


Rys. 1. Od lewej: krata M_3 (tzw. *diament*) oraz N_5 (tzw. *pentagon*)

Fakt 2 [Davey-Poguntke-Rival]. *Skończenie wysoka krata jest:*

(I) *półdystrybutywna wtedy i tylko wtedy, gdy żadna krata z Rysunku 2 nie jest jej podkratą*.

(II) *0-dystrybutywna wtedy i tylko wtedy, gdy żadna krata z Rysunku 3 nie jest jej 0-podkratą* (Davey, Poguntke i Rival, 1975).



Rys. 2. Kraty charakteryzujące półdystrybutywność

Rys. 3. Kraty charakteryzujące 0-dystrybutywność

Fakt 3. *Skończona krata jest pseudokomplementarna wtedy i tylko wtedy, gdy jest 0-dystrybutywna*[2].

3. Kraty zupełnie normalne i operacja różnicy

Niech L będzie skończoną kratą półdystrybutywną oraz $a, b \in L$. Rozważmy zbiór $A = \left\{x \in L : x \vee b = a \vee b\right\}$. Łatwo zauważyć, że zbiór A posiada element najmniejszy, ponieważ skończoność i półdystrybutywność implikują $\left(\wedge A\right) \vee b = a \vee b$. Wobec tego, przyjmijmy definicję[3]

$$a \setminus b = \min\left\{x \in L : x \vee b = a \vee b\right\}$$

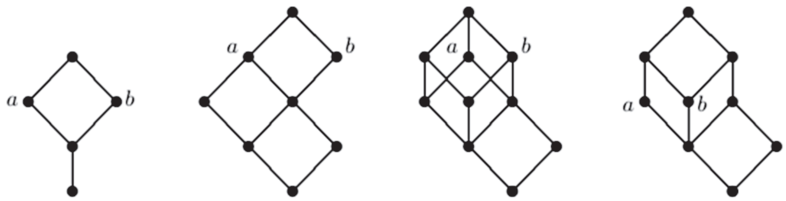
i odnotujmy prosty

Fakt 4. *Skończona krata półdystrybutywna jest zupełnie normalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych a, $b \in L$ zachodzi* $\left(a \setminus b\right) \wedge \left(b \setminus a\right) = 0$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Ustalmy dowolne a, $b \in L$. Na mocy warunku (CN) istnieją $x, y \in L$ takie, że $x \vee b = a \vee b$, $y \vee a = a \vee b$ oraz $x \wedge y = 0$. Wówczas $a \backslash b \leq x$ i $y \leq b \backslash a$, a stąd $\left(a \setminus b\right) \wedge \left(b \setminus a\right) = 0$.

$\left(\Leftarrow\right)$ Ustalmy dowolne a, $b \in L$. Aby wykazać, że warunek (CN) zachodzi, wystarczy położyć: $x = a \backslash b$ oraz $y = b \backslash a$. ■

W oparciu o Fakt 4 łatwo wykazujemy, że poniższe kraty nie spełniają (CN).



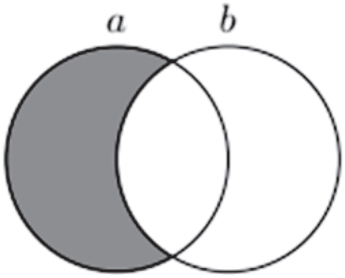
Rys. 4. Kraty niespełniające (CN)

Oznaczenie $a \backslash b$ wprowadzone powyżej nieprzypadkowo sugeruje, że mamy do czynienia z pewnego rodzaju różnicą elementów. Istotnie, operację tę da się wywieść z teoriomnogościowego pojęcia różnicy zbiorów.

---

2 Twierdzenie to należy do tzw. folkloru i trudno wskazać jego autora. Łatwy dowód można znaleźć w (Balasubramani, Venkatanarasimhan, 2001, twierdzenia 2.5 i 2.7).

3 Symbole min A oraz max A oznaczają odpowiednio element najmniejszy i największy w zbiorze A.

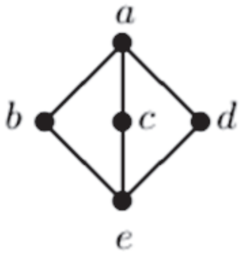


Rys. 5. Różnica zbiorów

Na zacieniowaną część, to jest zbiór $\{x \in a : x \notin b\}$, możemy spojrzeć jak na (1) maksymalny podzbiór zbioru a rozłączny z b lub (2) minimalny zbiór, który razem z b sumuje się do $a \cup b$. Te dwie intuicje przeniesione na grunt teorii krat formułujemy następująco:

$$a - b = \max\{x \in L : x \leq a \,\&\, x \wedge b = 0\},$$
$$a \setminus b = \min\{x \in L : x \vee b = a \vee b\}.$$

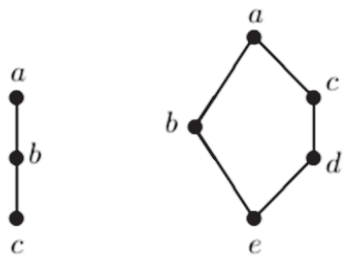
W klasie krat Boole'owskich obydwie operacje są tożsame, ponieważ $a - b = a \wedge b' = a \setminus b$ [4]. Poza klasą krat Boole'owskich sytuacja jest bardziej skomplikowana. Przede wszystkim, zauważmy, że elementy $a - b$, $a \setminus b$ mogą w ogóle nie istnieć. Istotnie, w kracie M_3 nie istnieje ani element $a - b = \max\{c, d, e\}$, ani element $a \setminus b = \min\{c, d, a\}$.



Rys. 6. Elementy *a – b* oraz *a\b* nie istnieją

Nawet jeżeli obydwie operacje są poprawnie zdefiniowane, elementy $a - b$, $a \setminus b$ mogą nie być identyczne. Istotnie, łatwo sprawdzić, że w dwóch poniższych kratach obydwie operacje są poprawnie zdefiniowane, a jednak w kracie po lewej stronie (łańcuch trójelementowy C_3) zachodzi $a - b = c < a = a \setminus b$, natomiast w N_5 mamy $a \setminus b = d < c = a - b$.

4 Można pokazać, że w klasie krat skończonych półdystrybutywnych i 0-dystrybutywnych warunek $(\forall a, b \in L)(a - b = a \setminus b)$ implikuje Boole'owskość.



Rys. 7. Elementy oraz istnieją, ale są różne

Jeżeli krata jest 0-dystrybutywna, to wprost z definicji operacji $a - b$ wynika, że $a - b = a \wedge b^*$. W istocie, dowód Faktu 3 można łatwo zmodyfikować, uzyskując wynik analogiczny:

Fakt 5. *Niech L będzie dowolną skończoną kratą. Następujące warunki są równoważne:*

(I) *L jest 0-dystrybutywna*,

(II) *dla dowolnych a, $b \in L$, element $a - b$ jest poprawnie zdefiniowany.*

Poniższe twierdzenie ustala zakres stosowalności operacji .

Twierdzenie 1. *Niech L będzie dowolną skończoną kratą. Następujące warunki są równoważne:*

(I) *L jest półdystrybutywna*,

(II) *dla dowolnych a, $b \in L$, element $a\backslash b$ jest poprawnie zdefiniowany.*

Dowód. (I) $\Rightarrow$ (II). Ustalmy dowolne a, $b \in L$ oraz połóżmy $X = \left\{x \in L : x \vee b = a \vee b\right\}$. Wobec skończoności kraty L możemy przyjąć, że $X = \{x_1, \dots x_n\}$. Mamy wówczas $x_1 \vee b = \ldots = x_n \vee b = a \vee b$, zatem na mocy półdystrybutywności zachodzi $\left(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n\right) \vee b = a \vee b$, co oznacza, że element $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ należy do zbioru X, a zatem zbiór X posiada element najmniejszy, to jest $a\backslash b = \min X$.

(II) $\Rightarrow$ (I). Ustalmy dowolne a, $b \in L$ takie, że $a \vee b = a \vee c$. Z założenia element $b\backslash a$ jest poprawnie zdefiniowany, a co więcej

$$b \setminus a = \min\left\{x \in L : x \vee a = b \vee a\right\} \leq b, c.$$

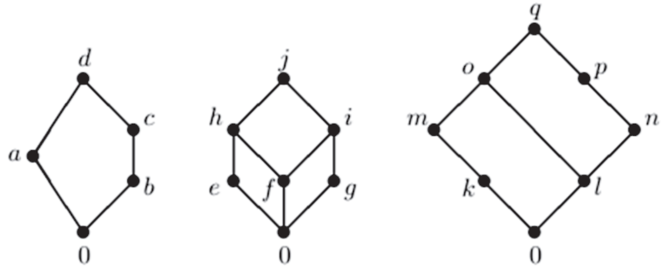
Stąd $b \setminus a \leq b \wedge c$, zaś dodając stronami element a otrzymujemy:

$$a \vee b = \left(b \setminus a\right) \vee a \leq a \vee \left(b \wedge c\right) \leq a \vee b,$$

co należało pokazać. ∎

Dla przykładu, rozważmy następujące kraty półdystrybutywne i obliczmy niektóre różnice:

$$c\setminus a=b,\ c\setminus b=c,\ d\setminus a=b,\ h\setminus e=f,\ h\setminus f=e,\ h\setminus g=e,$$
$$j\setminus e=g,\ j\setminus f=j,\ j\setminus h=g,\ m\setminus l=k,\ n\setminus m=n,\ o\setminus l=k,$$
$$o\setminus p=k,\ p\setminus l=p,\ p\setminus n=p,\ q\setminus k=n,\ q\setminus l=q,\ q\setminus p=k.$$



Rys. 8. Kraty niedystrybutywne, w których określona jest operacja różnicy

4. Podstawowe własności operacji różnicy

Poniższy lemat ujmuje podstawowe własności operacji $a\setminus b$.

Lemat 1. *Niech L będzie skończoną kratą półdystrybutywną. Dla dowolnych a, b, c ∈ L zachodzi:*

(I) $a\setminus b\leq a$,
(II) $(a\setminus b)\vee b=a\vee b$,
(III) $a\leq b\Leftrightarrow a\setminus b=0$,
(IV) $b\leq c\Rightarrow a\setminus c\leq a\setminus b$,
(V) $(a\setminus b)\setminus b=a\setminus b$,
(VI) $(a\setminus b)\setminus(b\setminus a)=a\setminus b$,
(VII) $(a\vee b)\setminus c\leq(a\setminus c)\vee(b\setminus c)$.

Dowód. Ad (I). Element a należy do zbioru $\{x\in L: x\vee b=a\vee b\}$, a zatem

$$a\setminus b=\min\{x\in L: x\vee b=a\vee b\}\leq a.$$

Ad (II). Wprost z definicji elementu $a\setminus b$ wynika, że należy on do zbioru $\{x\in L: x\vee b=a\vee b\}$, zatem $(a\setminus b)\vee b=a\vee b$.

Ad (III). (⇒) Załóżmy, że $a\leq b$. Wówczas mamy:

$$a\setminus b=\min\{x\in L: x\vee b=a\vee b\}=\min\{x\in L: x\vee b=b\}=0.$$

$(\Leftarrow)$ Jeżeli z kolei założymy, że $a\backslash b = 0$, czyli $\min\{x \in L : x \vee b = a \vee b\} = 0$, to w szczególności element 0 należy do zbioru $\{x \in L : x \vee b = a \vee b\}$, a zatem $0 \vee b = a \vee b$, to jest $a \leq b$.

Ad (IV). Załóżmy, że $b \leq c$. Na mocy punktu (II) $(a \backslash b) \vee b = a \vee b$, a dodając stronami element c i uwzględniając założenie, dostajemy $(a \backslash b) \vee c = a \vee c$. Oznacza to, że element $a\backslash b$ należy do zbioru $\{x \in L : x \vee c = a \vee c\}$, skąd dostajemy:

$$a \backslash c = \min\{x \in L : x \vee c = a \vee c\} \leq a \backslash b.$$

Ad (V). Zauważmy, że wobec podpunktu (II)

$$((a \backslash b) \backslash b) \vee b = (a \backslash b) \vee b = a \vee b,$$

zatem element $(a\backslash b)\backslash b$ należy do zbioru $\{x \in L : x \vee b = a \vee b\}$, skąd dostajemy

$$a \backslash b = \min\{x \in L : x \vee b = a \vee b\} \leq (a \backslash b) \backslash b \leq a \backslash b.$$

Ad (VI). Na mocy podpunktu (I) mamy $b\backslash a \leq b$, a stąd, kolejno z podpunktów (V), (IV) oraz (I) dostajemy:

$$a \backslash b = (a \backslash b) \backslash b \leq (a \backslash b) \backslash (b \backslash a) \leq a \backslash b.$$

Ad (VII). W oparciu o podpunkt (II) obliczamy łatwo:

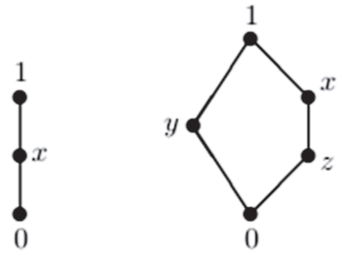
$$(a \backslash c) \vee (b \backslash c) \vee c = (a \backslash c) \vee b \vee c = a \vee b \vee c,$$

co oznacza, że element $(a \backslash c) \vee (b \backslash c)$ należy do zbioru $\{x \in L : x \vee c = a \vee b \vee c\}$, a zatem

$$(a \vee b) \backslash c = \min\{x \in L : x \vee c = a \vee b \vee c\} \leq (a \backslash c) \vee (b \backslash c). \quad \blacksquare$$

Uwaga 1. Nie wszystkie „naturalne" prawa teoriomnogościowej różnicy zachodzą w kratach półdystrybutywnych. Oto kilka z nich:

(I)	$a \wedge b = 0 \Rightarrow a \backslash b = a$	(fałszywe w N_5 dla $a = x$, $b = y$)
(II)	$a \backslash b = a \Rightarrow a \wedge b = 0$	(fałszywe w C_3 dla $a = 1$, $b = x$)
(III)	$a \backslash (a \wedge b) = a \backslash b$	(fałszywe w N_5 dla $a = x$, $b = y$)
(IV)	$a \backslash (a \backslash b) = a \wedge b$	(fałszywe w C_3 dla $a = 1$, $b = x$)
(V)	$(a \backslash b) \wedge b = 0$	(fałszywe w C_3 dla $a = 1$, $b = x$)
(VI)	$1 \backslash (1 \backslash a) = a$	(fałszywe w N_5 dla $a = x$)
(VII)	$(a \backslash b) \vee (a \wedge b) = a$	(fałszywe w N_5 dla $a = x$, $b = y$)
(VIII)	$a \leq b \Rightarrow a \backslash c \leq b \backslash c$	(fałszywe w N_5 dla $a = x$, $b = 1$, $c = z$)
(IX)	$(a \vee b) \backslash c = (a \backslash c) \vee (b \backslash c)$	(fałszywe w N_5 dla $a = x$, $b = y$, $c = z$)
(X)	$a \backslash (b \wedge c) = (a \backslash b) \vee (a \backslash c)$	(fałszywe w N_5 dla $a = x$, $b = x$, $c = y$)



Rys. 9. Kontrprzykłady: kraty C_3 oraz N_5

Lemat 2. *Jeżeli L jest skończoną, półdystrybutywną i modularną kratą, to dla dowolnego a $\in$ L zachodzi:*

$$a \in J(L) \Leftrightarrow (\forall b \in L)(a \nleq b \Rightarrow a \setminus b = a).$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $a \in J(L)$, $b \in L$ przy czym $a \nleq b$. Wynika stąd, że $a > 0$, zatem istnieje element p taki, że $p \prec a$. Na mocy Lematu 1 (I), $a \setminus b \leq a$, dodając zaś obustronnie p, otrzymujemy:

$$p \leq (a \setminus b) \vee p \leq a \vee p = a.$$

Wówczas możliwe są dwa przypadki: albo $(a \setminus b) \vee p = p$, albo $(a \setminus b) \vee p = a$. Wykażemy, że przypadek pierwszy prowadzi do sprzeczności.

Gdyby $(a \setminus b) \vee p = p$, to jest $a \setminus b \leq p$, to dodając stronami element b, dostajemy (w oparciu o Lemat 1 (II)):

$$a \leq a \vee b = (a \setminus b) \vee b \leq p \vee b,$$

a z modularności wnioskujemy dalej:

$$a = (p \vee b) \wedge a = p \vee (b \wedge a).$$

Element $a = (p \vee b) \wedge a = p \vee (b \wedge a)$ jest $\vee$ – nierozkładalny, więc $a = p$ lub $a = b \wedge a$. Pierwsza równość jest sprzeczna z wyborem elementu p, a druga – z założeniem; sprzeczność.

Wykazaliśmy zatem, że zachodzi drugi przypadek, to jest $(a \setminus b) \vee p = a$. Element a jest $\vee$ – nierozkładalny, zatem $a = a \setminus b$ lub $a = p$. Druga możliwość – jak już zauważyliśmy – nie może zachodzić, zatem ostatecznie $a = a \setminus b$.

($\Leftarrow$) Przez kontrapozycję załóżmy, że $a = b \vee c$ przy czym $b, c < a$. Wówczas $a \nleq b$, a ponadto obliczamy łatwo

$$a \setminus b = \min\{x \in L : x \vee b = a \vee b\} \leq c < a. \quad \blacksquare$$

Uwaga 2. Założenia Lematu 2 implikują dystrybutywność kraty L. Istotnie, wobec Faktu 1 (I) krata L nie zawiera N_5, zaś Faktu 2 (I) – nie zawiera również M_3. Z Faktu 1 (II) L jest więc dystrybutywna.

Uwaga 3. Założenie o modularności w Lemacie 2 jest istotne: w kracie N_5 (por. Rysunek 9) element x jest ∨ − nierozkładalny, a jednocześnie $x \nleq y$ i $x \setminus y \neq x$.

5. Charakteryzacja (CN)

Niech L będzie dowolną kratą. Rozważmy następujący warunek:

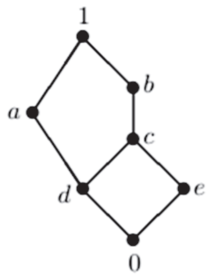
(R) $\left(\forall a, b \in J\left(L\right)\right)\left(a \parallel b \Rightarrow a \wedge b = 0\right)$.

Fakt 6. *Jeżeli L jest skończoną kratą dystrybutywną, to warunek (CN) implikuje warunek (R).*

Dowód. Ustalmy a, $b \in J(L)$ takie, że $a \parallel b$. Wówczas na mocy Lematu 2 dostajemy $a \setminus b = a$ oraz $b \setminus a = b$, a w konsekwencji warunek (CN) daje:

$$a \wedge b = \left(a \setminus b\right) \wedge \left(b \setminus a\right) = 0. \quad \blacksquare$$

Uwaga 4. W Fakcie 6 założenie o dystrybutywności (modularności) jest istotne: łatwo sprawdzić, że krata przedstawiona na Rysunku 10 jest półdystrybutywna, spełnia warunek (CN), ale nie spełnia (R): a, $b \in J(L)$, $a \parallel b$, ale $a \wedge b \neq 0$.



Rys. 10. Krata półdystrybutywna, spełniająca (CN), ale niespełniająca (R)

Twierdzenie 2. *Niech* L *będzie kratą skończoną, półdystrybutywną oraz 0-dystrybutywną. Wówczas warunek (R) implikuje (CN).*

Dowód przez kontrapozycję. Załóżmy, że krata L nie spełnia warunku (CN). Oznacza to, że istnieją a, $b \in$ L takie, że

(1) $\left(a \setminus b\right) \wedge \left(b \setminus a\right) > 0$.

Wynika stąd, że $a \parallel b$. Istotnie, gdyby np. $a \leq b$, to wówczas, wobec Lematu 1 (III), $a \backslash b = 0$, co przeczy warunkowi (1). Bez straty ogólności możemy założyć, że elementy a i b zostały tak wybrane, że para (a, b) jest minimalna w sensie następującej relacji porządku:

$$(x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z \,\&\, y \leq t.$$

Wykażemy, że

(2) $a \backslash b = a$ oraz $b \backslash a = b$.

Istotnie, wobec Lematu 1 (I) mamy

$$(a \backslash b, b \backslash a) \leq (a, b),$$

a z Lematu 1 (VI) otrzymujemy

$$((a \backslash b) \backslash (b \backslash a)) \wedge ((b \backslash a) \backslash (a \backslash b)) = (a \backslash b) \wedge (b \backslash a) > 0.$$

Wobec minimalności pary (a, b) musi zachodzić równość:

$$(a \backslash b, b \backslash a) = (a, b),$$

co kończy dowód warunku (2).

Naszym celem jest teraz wykazać, że a oraz b są $\vee$ – nierozkładalne. Przypuśćmy nie wprost, że któryś z nich, powiedzmy a, jest $\vee$ – rozkładalny. Istnieją wówczas $p, q \in L$ takie, że:

(3) $a = p \vee q$, $p < a$ oraz $q < a$.

Jest jasne, że $(p, b) < (a, b)$ oraz $(q, b) < (a, b)$, zatem wobec minimalności pary (a, b) dostajemy:

(4) $(p \backslash b) \wedge (b \backslash p) = 0$ oraz $(q \backslash b) \wedge (b \backslash q) = 0$.

Skoro jednak $p \leq a$, to kolejno z warunku (2) i Lematu 1 (IV), (I) obliczamy

$$b = b \backslash a \leq b \backslash p \leq b\,,$$

czyli $b \backslash p = b$. Analogicznie pokazujemy, że $b \backslash q = b$, wobec czego warunek (4) przyjmuje postać:

$$(p \backslash b) \wedge b = 0 \text{ oraz } (q \backslash b) \wedge b = 0.$$

Skoro krata L jest 0-dystrybutywna, dostajemy:

(5) $b \wedge ((p \backslash b) \vee (q \backslash b)) = 0.$

Z drugiej strony, na mocy (2), (3) i Lematu 1 (VII) obliczamy

$$a = a \backslash b = (p \vee q) \backslash b \leq (p \backslash b) \vee (q \backslash b),$$

To jest $a \leq (p \backslash b) \vee (q \backslash b)$. Mnożąc to stronami przez b, dostajemy na mocy (5):

$$a \wedge b \leq b \wedge ((p \backslash b) \vee (q \backslash b)) = 0,$$

co być nie może wobec (1) i (2). Hipoteza doprowadziła do sprzeczności, a zatem element a musi być $\vee$ – nierozkładalny. Rozumując tak samo wykazujemy, że b jest $\vee$ – nierozkładalny. Ostatecznie wskazaliśmy elementy $a, b \in J(L)$ takie, że $a \parallel b$, ale $a \wedge b > 0$, co dowodzi, że warunek (R) nie jest spełniony. ■

Problemy. Scharakteryzować następujące warianty warunku (CN) oraz aksjomatu Wolniewicza (W):

a) $\left(\forall a,b \in L\right)\left(\exists x, y \in At\right)\left(a \vee y = x \vee b = a \vee b\right)$,

b) $\left(\forall a,b \in L\right)\left(\exists x, y \in L\right)\left(x \leq a \,\&\, y \leq b \,\&\, x \vee y = a \vee b \,\&\, x \wedge y = 0\right)$,

c) $\left(\forall a,b \in L\right)\left(\exists x, y \in At\right)\left(x \leq a \,\&\, y \leq b \,\&\, x \vee y = a \vee b\right)$,

d) $\left(\forall a,b \in L \setminus \{0,1\}\right)\left(a \vee b = 1 \Rightarrow \left(\exists x, y \in At\right)\left(x \leq a \& \leq a \,\&\, x \vee y = 1\right)\right)$,

e) $\left(\forall a,b \in L \setminus \{0,1\}\right)\left(a \vee b = 1 \Rightarrow \left(\exists x, y \in At\right)\left(a \vee y = x \vee b = 1 \,\&\, x \wedge y = 0\right)\right)$.

Bibliografia

Balasubramani, P., Venkatanarasimhan, P.V. (2001). Characterizations of the 0-distributive lattices. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 32(3), s. 367–374.

Balbes, R., Dwinger, P. (1974). *Distributive Lattices*. Columbia: University of Missouri Press.

Birkhoff, G. (1948). *Lattice Theory* (2nd ed.). Providence, R. I.: American Mathematical Society, Colloquium Publications 25.

Davey, B., Poguntke, W., Rival, I. (1975). A characterization of semi-distributivity. *Algebra Universalis*, 5, s. 72–74.

Grätzer, G. (1978). *General Lattice Theory*. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag.

Monteiro, A.A. (1954). L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques. W: *De Segundo Symposium de Matemáticas*,s. 129–162. Mendoza: Imprenta y Casa Editora "Coni".

Monteiro, A.A. (1974). L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques I–II. Bahía Blanca: Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur.

Ploščica, M. (2021). Cevian Properties in Ideal Lattices of Abelian l-groups. *Forum Mathematicum* 33 (6), s. 1521–1534.

Ploščica, M., Wehrung, F. (2025). Monotone-Cevian and Finitely Separable Lattices. *Order* 42, s. 211–229.

Stern, M. (1999). *Semimodular Lattices: Theory and Applications*. New York: Cambridge University Press.

Wehrung, F. (2020). Cevian Operations on Distributive Lattices. *Journal of Pure and Applied Algebra* 224 (4), 106202.

Walendziak, A. (2009). *Podstawy algebry ogólnej i teorii krat*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Wolniewicz, B. (1985). *Ontologia sytuacji: Podstawy i zastosowania*. Warszawa: PWN.

MARCIN ŁAZARZ

On the concept of complementation and completely normal lattices

Abstract: In this paper, we characterize finite completely normal lattices in terms of their irreducible elements. Our analysis employs the concept of difference, which we introduce within the framework of finite semi-distributive lattices.

Keywords: lattice, nonmodular, semi-distributive, completely normal, pseudocomplement, difference

Marek Magdziak
Uniwersytet Wrocławski | ORCID: 0000-0002-5465-4451

O formalnych aspektach norm i ocen aksjologicznych

Abstrakt: Można powiedzieć, że przedmiot jest wartościowy dokładnie wtedy, gdy jest taki, jaki być powinien. Z drugiej jednak strony można także stwierdzić, że przedmiot posiada pewną wartość, gdy dobrze, że jest taki, jaki jest. To, że przedmiot jest taki, jaki być powinien, oznacza, że przedmiot ten jest taki to a taki, a zarazem powinno być tak, że jest on taki to a taki. To zaś, że dobrze, że przedmiot jest taki to a taki oznacza, że przedmiot ten jest taki to a taki, a zarazem dobrze, gdy taki to a taki jest. Pojęcie wartości przedmiotu wiąże się zatem ściśle z pojęciem powinności pewnego stanu rzeczy i z pojęciem dobra pewnego stanu rzeczy. Jednak związki logiczne zachodzące pomiędzy sądami o postaci powinno być tak a tak oraz dobrze, gdy jest tak a tak, nie są całkowicie jasne. W artykule przedstawiona zostanie analiza logiczna takich związków. Przedmiotem rozważań będzie także pojęcie zła obecne w sądach o postaci źle, gdy jest tak a tak.

0. Jak twierdził Henryk Elzenberg (Elzenberg, 2002, s. 71–95), obiekt jest wartościowy lub, inaczej mówiąc, posiada pewną wartość wtedy i tylko wtedy, gdy jest taki, jaki być powinien. Określenie to budzi jednak wiele pytań na przykład o jego status logiczny. Czy jest to formuła definicyjna, czy też aksjomatyczna? Czy stanowi definicję wartości lub tego, że pewien obiekt jest wartościowy, czy też jest wyrazem intuicyjnie pewnej, choć niekoniecznie jednoznacznej, charakterystyki tego, czym jest wartość, lub tego, że pewien przedmiot jest wartościowy? Jeśli uznać,

że stanowi formułę definicyjną, to można dalej pytać, czy należy ją interpretować jako definicję nominalną słowa ‘wartość’, czy też jako definicję realną wartości. Czy odpowiada ona na pytanie ‘Co oznacza słowo wartość?’ albo ‘Co to znaczy, że pewien obiekt jest wartościowy?’, czy też na pytanie ‘Czym jest wartość?’ albo ‘Na czym polega to, że pewien obiekt jest wartościowy?’. Jest oczywiście możliwe, że formuła ta jest zarówno definicją nominalną słowa ‘wartość’ i definicją realną wartości. Jednak jako definicja nominalna nie jest ona na pewno definicją sprawozdawczą terminu ‘wartość’ występującego w języku potocznym. Jest tak przede wszystkim dlatego, że w języku potocznym termin ‘wartość’ występuje w wielu różnych znaczeniach, a nawet więcej, mamy w nim do czynienia z wieloma różnymi, choć równobrzmiącymi terminami, których odmienność ujawnia się w różnych kontekstach sytuacyjnych i okolicznościach użycia. Formułę tę można jednak interpretować jako definicję realną wartości, lub raczej pewnego szczególnego typu wartości, mianowicie wartości perfekcyjnej, oraz jako nominalną definicję projektującą terminu ‘wartość’ w obrębie pewnej określonej teorii aksjologicznej, mianowicie teorii wartości perfekcyjnych. Rozważmy teraz pewną wersję tej formuły:

(A) Obiekt jest wartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest taki to a taki, a zarazem powinno być tak, że taki to a taki jest.

Trzeba tu jednak dokładniej wyjaśnić, na czym polega to, że pewien obiekt jest taki to a taki. Czy chodzi tu o to, że obiekt ten posiada pewną cechę, czy o to, że jest powiązany z innymi obiektami za pośrednictwem pewnych relacji, czy o to, że na przykład zmienia się pod pewnym względem, czy też, ogólniej, że dzieje się coś, co go w istotny sposób dotyczy, a zatem, że jest podmiotem pewnego stanu rzeczy, który zachodzi? Zdaniem Elzenberga to, że obiekt **a** jest taki to a taki, to tyle, że obiekt ten posiada pewną cechę *C*, w skrócie, że **a** jest C. Dlatego formułę (A) można zinterpretować jako

(B) **a** jest wartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy **a** powinno być C, a zarazem **a** jest C. (Elzenberg, 2002, s. 92).

Jak pisze Elzenberg (Elzenberg, 2002, s. 92), „wyraz »wartościowy« znaczy »taki, jaki powinien być«, »posiadający taką właściwość, jaką powinien posiadać«. Ta zaś właściwość jest czym innym niż wartość sama”. Niektóre uwagi Elzenberga sugerują także, że wartość, jako to, co jest definiowane w tej formule, to pewien stan rzeczy lub, inaczej mówiąc, pewna sytuacja. Jak podkreśla Elzenberg (Elzenberg, 2002, s. 92), „Sensu stricto — wartością przedmiotu jest tylko ów fakt — to, że on cechę c posiada [...] Wartość tedy nie jest cechą [...], ale jest posiadaniem pewnej cechy [...]”. Wartość obiektu nie jest więc żadną z jego cech, lecz pewną sytuacją lub pewnym stanem rzeczy, który dotyczy owego przedmiotu.

Zauważmy, że w formule (B) występują wyrażenia, które odnoszą się do przedmiotów należących do trzech różnych kategorii ontologicznych, mianowicie do stanu rzeczy lub sytuacji (po lewej stronie równoważności) oraz do obiektu i cechy (po prawej stronie równoważności). Można to jednak nieco uprościć, odchodząc tym samym od założeń przyjmowanych przez Elzenberga i odnosić się jedynie do obiektów i stanów rzeczy (lub sytuacji). Pomocne okazuje się tu wprowadzone przez Eugenię Ginsberg-Blaustein (Ginsberg, 1982, s. 265–287, Z Ginsbergów Blausteinowa, 1931, s. 143–168) pojęcie bycia przez pewien obiekt podmiotem pewnego stanu rzeczy. To że obiekt jest taki to a taki, nie musimy więc zawsze rozumieć tak, że posiada on pewną cechę, lecz tak, że jest on podmiotem pewnego stanu rzeczy, który zachodzi. Pozwala to na bardziej ogólne spojrzenie na to, że pewien obiekt jest taki to a taki. Może oczywiście w szczególności chodzić tu o to, że obiekt ten posiada pewną cechę, ale także o to, że obiekt ten pozostaje w pewnych relacjach do innych obiektów, o to, że coś się z nim dzieje itp. Formule (A) można więc nadać następującą postać:

(C) Obiekt **a** jest wartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi pewien stan rzeczy, taki, którego podmiotem jest obiekt **a**, i który zarazem powinien zachodzić.

Można powiedzieć, że ten stan rzeczy zachodząc, nadaje pewną wartość będącemu jego podmiotem obiektowi **a**.

Pojęcie wartości może być jednak analizowane nie tylko przy pomocy pojęcia tego, co być powinno, ale także przy pomocy pojęcia tego, co jest dobre, gdy jest. To drugie podejście jest bliższe podejściu Tadeusza Czeżowskiego (Czeżowski, 1989, s. 115–116). Zgodnie z nim wartość przedmiotu może być rozumiana następująco:

(D) Obiekt jest wartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest on taki to a taki, a jednocześnie dobrze, gdy jest taki to a taki.

Formule tej można także nadać następującą postać:

(E) Obiekt **a** jest wartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi pewien stan rzeczy taki, którego podmiotem jest obiekt **a**, a zarazem taki, że dobrze gdy zachodzi.

Przedmiotem dalszych rozważań będą zatem pojęcia powinności i dobra jako pojęcia stanowiące podstawę dla pojęcia wartości. Dlatego poddane analizie zostaną wyrażenia *'powinno być tak, że'* oraz *'dobrze, gdy'*. Wyrażenia te, poprzedzając zdania oznajmujące, tworzą odpowiednio normy i oceny aksjologiczne, czyli zdania o postaci *'Powinno być tak a tak.'* i *'Dobrze, gdy jest tak a tak.'*. Pierwsze z tych zdań stwierdza powinność pewnej sytuacji, drugie zaś stwierdza dobro pewnej sytuacji. Jeśli twierdzimy, że powinno być tak a tak, to sytuację, że jest tak a tak będziemy także nazywać sytuacją, która powinna zachodzić. Jeśli natomiast twierdzimy, że dobrze, gdy jest tak a tak, to sytuację, że jest tak a tak będziemy także nazywać sytuacją dobrą. Jeśli teraz powinno być tak a tak, to wydaje się oczywiste, że dobrze, gdy jest tak a tak, ponieważ dobrze gdy jest tak, jak być powinno. Nie każda dobra sytuacja jest jednak sytuacją, która być powinna. Pojęcie dobra jest naturalnie powiązane z pojęciem zła. Przedmiotem analizy należy zatem także uczynić wyrażenie *„źle, gdy"* oraz zdania o postaci *„Źle, gdy jest tak a tak"*. Ponadto pojęcie dobra występuje także w formie relatywnej, wtedy gdy porównuje się ze sobą pewne sytuacje ze względu na ich dobro, twierdząc na przykład, że jest równie dobrze, lub nawet lepiej, gdy zachodzi pewna sytuacja, niż gdy zachodzi jakaś inna sytuacja. Dlatego należy także wziąć pod uwagę i uczynić przedmiotem rozważań wyrażenie *„jest równie dobrze, lub nawet lepiej gdy..., niż gdy..."*. W szczególności wydaje się, że dobrze, gdy jest tak a tak dokładnie wtedy, gdy jest równie dobrze, lub nawet lepiej, gdy jest tak a tak, niż gdy nie jest tak a tak.

1. Aby rozważania te stały się nieco bardziej systematyczne i dzięki temu zyskały bardziej przejrzystą postać, w dalszej części wprowadzimy pewną, na razie jeszcze nieformalną, notację. Wykorzystamy mianowicie pewien język zdaniowy powstały poprzez wzbogacenie standardowego języka klasycznego rachunku zdań o symbole D, Z i P oraz o symbol ≥. Pierwsze trzy symbole są z czysto syntaktycznego punktu widzenia jednoargumentowymi spójnikami zdaniowymi, zaś symbol ≥ to dwuargumentowy spójnik zdaniowy. Jeśli teraz litery A, B, C, ... zastępować będą dowolnie ustalone poprawnie zbudowane formuły zdaniowe, to wszystkie wyrażenia o postaci DA, ZB, PC i A≥B także będą formułami zdaniowymi. Formułę DA będziemy czytać: *Dobrze, gdy A*, formułę ZB będziemy czytać: *Źle gdy B*, formułę PC będziemy czytać: *Powinno być tak, że C*, zaś formułę A≥B będziemy czytać: *Równie dobrze, lub nawet lepiej, gdy A niż gdy B*, albo *Co najmniej tak samo dobrze gdy A, jak gdy B.* Symbole ~, ∧, ∨, → i ≡ będą zaś używane odpowiednio jako symbole negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji materialnej i równoważności materialnej. Użyjemy też nawiasów jako znaków przestankowych. Z semantycznego punktu widzenia poprawnie zbudowane formuły zdaniowe reprezentują sytuacje, zaś symbole D, Z i P reprezentują modalności *de dicto*. Powiemy też, że *formuła* A *implikuje logicznie*

formułę B dokładnie wtedy, gdy implikacja materialna A→B obowiązuje logicznie, oraz że *formuły* A *i* B *są równoważne logicznie* dokładnie wtedy, gdy równoważność materialna A ≡ B obowiązuje logicznie. Jeśli A implikuje logicznie B, to powiemy także że *sytuacja* A *logicznie pociąga za sobą sytuację* B, lub że *sytuacja* B *wynika logicznie z sytuacji* A. Notacja ta posłuży do wstępnej analizy związków logicznych pomiędzy modalnościami dobra, zła i powinności.

Wydaje się oczywiste, że jeśli powinno być tak, że A oraz powinno być tak, że B, to tym samym powinno być tak, że A i B. Podobnie jeśli dobrze, gdy A oraz dobrze, gdy B, to także dobrze, gdy A i B. Z kolei jeśli źle, gdy A oraz źle gdy B, to źle gdy A lub B. Za logicznie obowiązującą należy zatem uznać każdą formułę o postaci:

(1) $(PA \land PB) \rightarrow P(A \land B)$,

(2) $(DA \land DB) \rightarrow D(A \land B)$,

(3) $(ZA \land ZB) \rightarrow Z(A \lor B)$.

Jeśli sytuacja A logicznie pociąga za sobą sytuację B, to sytuacja, że powinno być tak, że A pociąga za sobą sytuację, że powinno być tak, że B, a sytuacja, że dobrze, gdy A pociąga za sobą sytuację, że dobrze, gdy B. To, co wynika z tego, co być powinno, także być powinno, a to, co wynika z tego, co dobre, także jest dobre. Dla dowolnie ustalonych formuł A i B, mamy zatem:

(4) jeśli A implikuje logicznie B, to PA implikuje logicznie PB,

(5) jeśli A implikuje logicznie B, to DA implikuje logicznie DB.

Jeśli z kolei sytuacja A logicznie pociąga za sobą sytuację B, to sytuacja, że źle, gdy B pociąga za sobą sytuację, że źle, gdy A. To, co logicznie pociąga za sobą to, co złe, także jest złe. Dla dowolnie ustalonych formuł A i B mamy zatem:

(6) jeśli A implikuje logicznie B, to ZB implikuje logicznie ZB.

Oczywiście dobrze, gdy jest tak, jak jest dobrze, czyli dobrze, gdy zachodzi to, co jest dobre i gdy dobre jest to, co zachodzi. Za logicznie obowiązujące można zatem uznać wszystkie formuły o postaci:

(7) $D(DA \equiv A)$.

Z drugiej strony, powinno być tak, jak być powinno. Logicznie obowiązujące wydają się zatem wszystkie formuły o postaci:

(8) $P(PA \rightarrow A)$.

Jednak nie każda sytuacja, która zachodzi, powinna być sytuacją taką, która być powinna. Dlatego schemat:

(9) $P(A \rightarrow PA)$

nie jest już schematem formuł obowiązujących logicznie.

Oczywiście jest źle, gdy dzieje się to, co źle, gdy się dzieje. Logicznie obowiązuje zatem każda formuła o postaci:

(10) $Z(ZA \land A)$.

Dalej, jeśli jest źle, gdy zachodzi pewna sytuacja, to dobrze jest, gdy sytuacja ta nie zachodzi. Za logicznie obowiązującą wypada więc uznać każdą formułę o postaci:

(11) $ZA \rightarrow D(\sim A)$.

Jednak to, iż dobrze jest, gdy zachodzi pewna sytuacja, nie pociąga logicznie za sobą tego, że źle, gdy sytuacja ta nie zachodzi. Schemat:

(12) $DA \rightarrow Z(\sim A)$

nie jest zatem schematem formuł obowiązujących logicznie.

Jeśli jakaś sytuacja powinna zachodzić, to oczywiście dobrze jest, gdy zachodzi. Za obowiązujące logicznie należy zatem uznać wszystkie formuły o postaci:

(13) $PA \rightarrow DA$.

Ale już nie każda sytuacja, która dobrze, gdy zachodzi, powinna zachodzić. Schematem formuł obowiązujących logicznie nie będzie zatem schemat:

(14) $DA \rightarrow PA$.

Dalej, jeśli źle, gdy zachodzi pewna sytuacja, to tym samym sytuacja ta powinna nie zachodzić. Jeśli zaś pewna sytuacja powinna zachodzić, to źle gdy sytuacja ta nie zachodzi. Za schematy formuł obowiązujących logicznie należy więc uznać schematy:

(15) $ZA \rightarrow P(\sim A)$,

(16) $PA \rightarrow Z(\sim A)$,

a zatem także schematy:

(17) $ZA \equiv P(\sim A)$,

(18) $PA \equiv Z(\sim A)$.

Stąd jest źle, gdy zachodzi pewna dowolnie ustalona sytuacja dokładnie wtedy, gdy sytuacja ta powinna nie zachodzić oraz dowolnie ustalona sytuacja powinna zachodzić dokładnie wtedy, gdy jest źle, gdy sytuacja ta nie zachodzi. Pojęcie zła jest więc ściśle logicznie powiązane z pojęciem powinności. Natomiast związek logiczny pomiędzy pojęciem zła a pojęciem dobra nie jest już tak silny. Złe nie jest więc to, co jest sprzeczne logicznie z tym, co dobre, lecz to, co jest sprzeczne logicznie z tym, co być powinno.

Nieco bardziej problematyczne są trzy następujące schematy:

(19) $PA \rightarrow \sim P(\sim A)$,

(20) $DA \rightarrow \sim D(\sim A)$,

(21) $ZA \rightarrow \sim Z(\sim A)$.

Uznanie ich za schematy formuł obowiązujących logicznie wykluczałoby okoliczności, w których powinny zachodzić dwie sytuacje logicznie sprzeczne, okoliczności, w których dobrze, gdy zachodzą dwie sytuacje logicznie sprzeczne oraz okoliczności, w których źle, gdy zachodzą dwie sytuacje logicznie sprzeczne. Dlatego wykluczałoby to także okoliczności, w których odpowiednio wszystko powinno zachodzić, wszystko jest dobre i wszystko jest złe. Okoliczności takie to oczywiście przypadki graniczne, jednak nie należy ich z góry wykluczać. Rozsądne wydaje się natomiast przyjęcie nieco osłabionych wersji tych schematów, mianowicie:

(22) $\sim PB \rightarrow (PA \rightarrow \sim P(\sim A))$,

(23) $\sim DB \rightarrow (DA \rightarrow \sim D(\sim A))$,

(24) $\sim ZB \rightarrow (ZA \rightarrow \sim Z(\sim A))$.

Uznanie ich za schematy formuł obowiązujących logicznie wiąże się z przekonaniem, że jeśli nie wszystko być powinno, to spośród dwóch sytuacji logicznie sprzecznych przynajmniej jedna nie powinna zachodzić; jeśli nie wszystko jest dobre, to spośród dwóch sytuacji logicznie sprzecznych przynajmniej jedna nie jest dobra i jeśli nie wszystko jest złe, to spośród dwóch sytuacji logicznie sprzecznych przynajmniej jedna nie jest zła.

Odrzucenie schematów (19), (20) i (21) prowadzi także do odrzucenia schematów:

(25) $PA \rightarrow \sim ZA$,

(26) $DA \rightarrow \sim ZA$.

Uznanie tych schematów za schematy formuł obowiązujących logicznie, przy jednoczesnej akceptacji schematów (14) i (17), pociągałoby za sobą uznanie schematu (19), który wydaje się jednak wątpliwy, przynajmniej w okolicznościach granicznych. Dlatego, uwzględniając okoliczności graniczne, nie zawsze wszystko to, co być powinno, nie jest złe i nie zawsze to, co jest dobre, nie jest złe. Można jednak przyjąć, że jeśli nie występują okoliczności graniczne, to to, co być powinno, nie jest złe i to, co jest dobre, nie jest złe. Odzwierciedla to schemat:

(27) $\sim DB \rightarrow ((PA \rightarrow \sim ZA) \wedge (DA \rightarrow \sim ZA))$.

Zwróćmy na koniec uwagę na związek pomiędzy bezwzględnym pojęciem dobra a relatywnym pojęciem dobra. Wydaje się, że dobrze jest, gdy zachodzi pewna dowolnie ustalona sytuacja dokładnie wtedy, gdy jest równie dobrze, lub nawet lepiej, gdy sytuacja ta zachodzi, niż gdy nie zachodzi. Dlatego za logicznie obowiązujące można uznać wszystkie formuły o postaci:

(28) $(A \geq \sim A) \equiv DA$.

Jeśli równie dobrze, lub nawet lepiej jest, gdy zachodzi pewna określona sytuacja A, niż gdy zachodzi pewna inna sytuacja B, to jeśli dobrze, gdy zachodzi B, to dobrze też, gdy zachodzi A. Jeśli bowiem jakaś sytuacja jest dobra, to każda sytuacja równie dobra lub od niej lepsza, też jest dobra. Odzwierciedla to schemat:

(29) $A \geq B \rightarrow (DB \rightarrow DA)$.

Stosunek, jaki zachodzi pomiędzy dowolnie ustaloną sytuacją a sytuacją równie dobrą lub od niej lepszą, jest oczywiście przechodni. Dlatego za logicznie obowiązujące można uznać wszystkie formuły o postaci:

(30) $((A \geq B) \wedge (B \geq C)) \rightarrow (A \geq C)$.

2. Spróbujmy teraz nieco bardziej przybliżyć omawiane wcześniej pojęcia, odwołując się do pewnej standardowej wersji semantyki światów możliwych. Termin światy możliwe rozumieć będziemy z grubsza w sensie R. Stalnakera. Jak pisze Stalnaker (Stalnaker, 1980, s. 439–455), „[o]gólną i jak sądzę istotną cechą racjonalnych działań – dociekania, rozważania, komunikacji – jest to, że zakładają one podmioty działające dokonujące rozróżnień pomiędzy alternatywnymi możliwościami. Teoria światów możliwych, to właśnie teoria, która przyjmuje alternatywne możliwości jako swe podstawowe pojęcie pierwotne". Idea leżąca u podstaw semantycznej charakterystyki pojęć powinności, dobra i zła jest z grubsza następująca. Punktem wyjścia dla normy lub oceny aksjologicznej pewnej dowolnie ustalonej sytuacji są zawsze pewne określone okoliczności. W okolicznościach tych pewne okoliczności alternatywne względem nich to okoliczności akceptowalne lub dopuszczalne. Pozostałe alternatywne okoliczności to okoliczności względem nich nieakceptowane lub niedopuszczalne. Ponadto pewne spośród okoliczności akceptowalnych to okoliczności optymalne lub idealne. To, co optymalne, jest bowiem także akceptowalne, choć nie

wszystko to, co akceptowalne, musi być optymalne. Oczywiście klasa możliwości akceptowalnych i klasa możliwości optymalnych może być inna z punktu widzenia różnych możliwych okoliczności. Zatem dla dowolnie ustalonych okoliczności możemy wyróżnić zbiór okoliczności względem nich akceptowalnych i zbiór okoliczności względem nich optymalnych. Drugi z tych zbiorów będzie jednak zawsze podzbiorem pierwszego z nich. Jeśli z punktu widzenia pewnych określonych okoliczności żadne okoliczności nie są akceptowalne, a zatem zbiór okoliczności względem nich akceptowalnych, podobnie jak zbiór okoliczności względem nich optymalnych, jest pusty, to powiemy, że okoliczności te stanowią przypadek graniczny. W okolicznościach takich żadne możliwości nie są ani akceptowalne, ani optymalne. Oczywiście nie każde okoliczności to okoliczności akceptowalne względem nich samych, a więc tym bardziej nie każde okoliczności to okoliczności optymalne względem nich samych. Zakładamy jednak, że jeśli pewne okoliczności są akceptowalne z punktu widzenia pewnych innych okoliczności, to są one także akceptowalne z punktu widzenia ich samych. Jeśli zaś jakieś okoliczności są optymalne lub doskonałe z punktu widzenia pewnych innych okoliczności, to z ich punktu widzenia one same są jedynymi okolicznościami optymalnymi lub doskonałymi. Zauważmy, że z punktu widzenia niektórych okoliczności może być wiele różnych okoliczności optymalnych, lecz z punktu widzenia takich okoliczności, które już są optymalne (z pewnego punktu widzenia jakichś innych okoliczności) tylko one same są optymalne. Założenie to nazywamy *aksjologiczną zasadą konsekwencji*. Z drugiej strony, zakładając pewną ustaloną niepustą klasę możliwych okoliczności, oznaczmy ją literą W, każdej sytuacji przyporządkować można zbiór wszystkich i tylko takich okoliczności, w których sytuacja ta zachodzi i, odpowiednio, każdej poprawnie zbudowanej formule zdaniowej przyporządkować można zbiór wszystkich i tylko takich okoliczności, w których formuła ta jest prawdziwa. Zbiór ten nazywać będziemy *treścią logiczną tej formuły* lub *treścią logiczną reprezentowanej przez tę formułę sytuacji*. Termin *treść logiczna* (ang. *propositional content*) został wprowadzony przez Russella (Russell, 2010, s. 509–533) jako odpowiednik używanego przez Fregego wyrażenia *beurteilbarer Inhalt*. Współcześnie wielu autorów zamiast *propositional content* używa terminu *proposition*.

Dla uproszczenia przyjmijmy teraz następujące kolejne oznaczenia. Dla dowolnie ustalonych możliwych okoliczności w, oraz dla dowolnie ustalonej sytuacji A, napis $w \vDash A$ oznaczać będzie, że sytuacja A zachodzi w okolicznościach w lub, że reprezentująca tę sytuację formuła jest prawdziwa w okolicznościach w. Dlatego treść logiczna sytuacji A, którą będziemy oznaczać symbolem |A|, to klasa wszystkich i tylko takich elementów W, takich że $w \vDash A$. Zatem dla dowolnego w, w należy do |A| dokładnie wtedy, gdy $w \vDash A$. Jak pisze Stalnaker (Stalnaker, 1980, s. 439–455), „[k]iedy jakaś osoba, coś powiada, to to, co powiada, ma zwykle jakąś zawartość (ang. *content*), a w terminologii Fregego, wyraża jakąś myśl. [...] [T]a zawartość, myśl czy treść logiczna (ang. *proposition*) może zostać oderwana zarówno od językowej formy, w której jest wyrażana — od środków użytych do jej wyrażenia — a także od siły i zamiaru, z którymi jest wyrażana — od celu jej wyrażenia. Natomiast [...] wyrazić jakąś treść logiczną (ang. *proposition*) [...], to w istocie odróżnić pewne możliwości od innych; uznawać czy zakładać pewną treść propozycjonalną lub być przekonanym co do pewnej treści propozycjonalnej, to uznawać, zakładać lub być przekonanym, że świat jest ulokowany w pewnej określonej części wyznaczonej pojęciowo przestrzeni tego, co możliwe”. Jeśli |A| jest klasą pustą, to sytuację A nazwiemy sytuacją niemożliwą lub sprzeczną. Sytuacja taka nie zachodzi w żadnych okolicznościach. Przez $R^A(w)$ oznaczać będziemy klasę wszystkich i tylko takich możliwych okoliczności, które są akceptowalne lub dopuszczalne w okolicznościach w, zaś przez $R^O(w)$ klasę wszystkich i tylko takich możliwych okoliczności, które są optymalne lub idealne w okolicznościach w. Oczywiście klasa $R^O(w)$ zawiera się w klasie $R^A(w)$. Natomiast dopełnienie klasy wszystkich i tylko takich możliwych okoliczności, które są akceptowalne lub dopuszczalne w okolicznościach *w*, czyli $W - R^A(w)$, to klasa wszystkich i tylko takich okoliczności, które są nieakceptowane lub niedopuszczalne w okolicznościach w. Powiemy, że okoliczności w stanowią przypadek graniczny, gdy $R^A(w)$, i dlatego także $R^O(w)$, jest klasą pustą. Z punktu widzenia takich okoliczności, żadne możliwe okoliczności nie są ani akceptowalne ani tym bardziej optymalne. To takie położenie, z którego nie ma żadnego dopuszczalnego wyjścia.

Przyjmujemy teraz, że

(a) w okolicznościach w powinna zachodzić sytuacja A dokładnie wtedy, gdy sytuacja A zachodzi we wszystkich okolicznościach akceptowalnych z punktu widzenia okoliczności w, czyli $w \vDash PA$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R^A(w)$ zawiera się w |A|;

(b) w okolicznościach w dobrze gdy zachodzi sytuacja A dokładnie wtedy, gdy sytuacja A zachodzi we wszystkich okolicznościach optymalnych z punktu widzenia okoliczności w, czyli $w \vDash DA$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R^O(w)$ zawiera się w |A|;

(c) w okolicznościach w źle gdy zachodzi sytuacja A dokładnie wtedy, gdy wszelkie okoliczności, w których zachodzi sytuacja A, to okoliczności nieakceptowalne z punktu widzenia okoliczności w, czyli $w \vDash ZA$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|A|$ zawiera się w $W - R^A(w)$;

(d) w okolicznościach w lepiej jest lub jest przynajmniej równie dobrze, gdy zachodzi sytuacja A, niż gdy zachodzi sytuacja B dokładnie wtedy, gdy wszelkie okoliczności optymalne z punktu widzenia okoliczności w, w których zachodzi sytuacja B, to okoliczności, w których zachodzi sytuacja A, czyli $w \vDash A^3B$ wtedy i tylko wtedy, gdy przekrój klas $R^O(w)$ i $|B|^M$ zawiera się w $|A|^M$.

Zauważmy, że jeśli okoliczności w stanowią przypadek graniczny, to w okolicznościach tych wszystko być powinno, wszystko jest dobre, a zarazem wszystko jest złe. Ponadto wszystko jest wtedy przynajmniej równie dobre, lub nawet lepsze, niż cokolwiek innego. Jeśli bowiem $R^A(w)$ i $R^O(w)$ są puste, to dla dowolnej sytuacji A, $R^A(w)$ i $R^O(w)$ zawierają się w $|A|$, zaś $|A|$ zawiera się w $W - R^A(w)$, co więcej, dla dowolnej sytuacji B przekrój klas $R^O(w)$ i $|B|^M$ zawiera się w $|A|^M$.

3. Przedstawimy teraz syntaktyczne ujęcie zarysowanych wcześniej idei. Najpierw wprowadzimy pewien sformalizowany język zdaniowy, podając jego alfabet i określając zbiór poprawnie zbudowanych formuł tego języka. Następnie naszkicowaną wcześniej teorię logiczną opiszemy dokładniej jako pewną teorię sformalizowaną, czyli jako zbiór takich i tylko takich poprawnie zbudowanych formuł, które stanowią tezy tej teorii. Uczynimy to, tworząc system aksjomatyczny charakteryzujący zbiór wszystkich jej tez. Teorię tę będziemy nazywać *logiką norm i ocen*, lub, w skrócie, *logiką NO*.

Alfabet języka rozwijanej w dalszej części teorii zawiera jedynie następujące symbole:

— przeliczalnie wiele liter zdaniowych p_0, p_1, p_2, p_3, ...,

— symbole spójników logicznych negacji: ~, koniunkcji: ∧, oraz implikacji materialnej: →,

— symbol operatora powinności: P, i dobra: D, oraz

— nawiasy, lewy: (, i prawy:).

Wyrażeniami nazywamy dowolne skończone ciągi symboli należących do alfabetu. Litery X, Y, ... reprezentują zaś dowolne wyrażenia.

Zbiór poprawnie zbudowanych formuł zdaniowych, lub krótko — formuł, to najmniejszy (ze względu na inkluzję) zbiór F spełniający następujące trzy warunki:

Każda litera zdaniowa należy do F.

Jeśli X należy do F i Y należy do F, to (X ∧ Y), (X→Y), ~X i ~Y należą do F.

Jeśli X należy do F, to PX i DX należą do F.

Symboli A, B, C... będziemy używać jako metalogicznych zmiennych przebiegających poprawnie zbudowane formuły zdaniowe. Formuły zdaniowe będziemy interpretować jako wyrażenia reprezentujące sytuacje w języku rozważanej teorii.

Symbole alternatywy: $\vee$, i równoważności materialnej: $\equiv$, wprowadzamy przy pomocy następujących skrótów definicyjnych:

(D1) $(A \vee B) =^{df} \sim(\sim A\grave{U}\sim B)$,

(D2) $(A \equiv B) =^{df} (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow B)$.

Symbol operatora zła: Z wprowadzamy zaś na mocy skrótu definicyjnego:

(D3) $ZA =^{df} P(\sim A)$.

Symbol $\geq$ wprowadzamy zaś na mocy skrótu definicyjnego:

(D4) $A \geq B =^{df} D(B \rightarrow A)$.

Symbol 1 zastępuje natomiast dowolnie ustaloną formułę zdaniową, która jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Nawiasy będziemy pomijać wszędzie tam, gdzie nie grozi to nieporozumieniem.

W tak opisanym języku zbudujemy teraz pewną teorię sformalizowaną (czyli sformalizowaną wersję logiki NO), przyjmując opisaną poniżej podstawę aksjomatyczną oraz reguły inferencyjne.

Pierwszą grupę aksjomatów (A0) stanowią wszystkie formuły powstałe z tautologii klasycznego rachunku zdań poprzez podstawienie za wszystkie występujące w nich litery zdaniowe formuł opisanego właśnie języka.

Drugą grupę aksjomatów stanowią wszystkie formuły o budowie opisanej przez następujące schematy:

(A1) $(PA \wedge PB) \rightarrow P(A \wedge B)$,

(A2) $(DA \wedge DB) \rightarrow D(A \wedge B)$,

(A3) $PA \rightarrow DA$,

(A4) $P(PA \rightarrow A)$,

(A5) $D(DA \equiv A)$.

Każdy aksjomat jest oczywiście tezą logiki NO.

Regułami inferencyjnymi są natomiast:

(R0) Reguła odrywania (*Modus Ponens*), w myśl której, jeśli formuła o postaci $A \rightarrow B$ jest tezą oraz formuła A jest tezą, to formuła B też jest tezą.

(R1) Reguła monotoniczności dla powinności, zgodnie z którą, jeśli formuła A → B jest tezą, to formuła PA → PB też jest tezą.

(R2) Reguła monotoniczności dla dobra, zgodnie z którą, jeśli formuła A → B jest tezą, to formuła DA → DB też jest tezą.

Dowód definiujemy standardowo, jako skończony ciąg formuł, taki, że każdy wyraz tego ciągu jest albo aksjomatem, albo został otrzymany z wcześniejszych wyrazów tego ciągu, na mocy reguły odrywania, reguły monotoniczności dla powinności lub reguły monotoniczności dla dobra. Powiemy, że ciąg taki jest dowodem formuły, która jest ostatnim wyrazem tego ciągu, dlatego tezą logiki NO jest każda taka i tylko taka formuła, dla której istnieje dowód.

Sformułujemy teraz kilka wniosków, które wypływają z przedstawionej właśnie syntaktycznej charakterystyki logiki NO. Wnioski te są w większości zgodne z wcześniejszymi intuicyjnymi ustaleniami.

(W0) Jeśli formuła A jest tezą, to formuły PA, DA oraz Z(~A) też są tezami.

Zarys dowodu: Załóżmy, że formuła A jest tezą. Zatem, na mocy klasycznego rachunku zdań, formuły (PA → A) → A oraz (DA ≡ A) → A są tezami i, z uwagi na (R1) i (R2), formuły (PA → A) → PA i D(DA ≡ A) → DA też są tezami. Ale dzięki (A4) i (A5) formuły P(PA → A) i D(DA ≡ A) są tezami i dlatego, formuła PA jest tezą oraz formuła DA jest tezą, a stąd na mocy (D3) także formuła Z(~A) jest tezą.

(W1) Jeśli formuła A → B jest tezą, to formuły ZB → ZA, B ≥ A, A ≥ C → B ≥ C oraz C ≥ B → C ≥ A też są tezami. Zbiór tez logiki NO jest więc w szczególności domknięty na regułę odwrotnej monotoniczności dla zła.

Zarys dowodu: Załóżmy, że formuła A → B jest tezą. Stąd, po pierwsze, na mocy (A0) i (R0) formuła ~B → ~A także jest tezą. Dlatego, z uwagi na (R1), formuła P(~B) → P(~A) także jest tezą, a zatem, dzięki (D3), formuła ZB → ZA też jest tezą. Po drugie, na mocy (W0), formuła D(A → B) jest tezą i dlatego formuła B^3A także jest tezą. Po trzecie wreszcie, formuła (C → A) → (C → B) jest tezą oraz formuła (B → C) → (A → C) jest tezą. Zatem, dzięki (R2), D(C → A) → D(C → B) jest tezą oraz formuła D(B → C) → D(A → C) jest tezą i dlatego, na mocy (D4), formuła jest tezą A ≥ C → B ≥ C oraz formuła C ≥ B → C ≥ A jest tezą.

(W2) Jeśli formuła A ≡ B jest tezą, to formuły PA ≡ PB, DA ≡ DB i ZA ≡ ZB także są tezami oraz formuła (A ≥ B) ∧ (B ≥ A) jest tezą. Zbiór tez logiki K jest zatem w szczególności domknięty na reguły ekstensjonalności dla powinności, dobra i zła.

Zarys dowodu: Załóżmy, że formuła $A \equiv B$ jest tezą. Stąd, na mocy (D2) formuła $A \rightarrow B$ jest tezą oraz formuła $B \rightarrow A$ jest tezą. Zatem, z uwagi na (R1), formuła $PA \rightarrow PB$ jest tezą oraz formuła $PB \rightarrow PA$ jest tezą, z uwagi na (R2), formuła $DA \rightarrow DB$ jest tezą oraz formuła $DB \rightarrow DA$ jest tezą, oraz z uwagi na (W1), formuła $ZB \rightarrow ZA$ jest tezą oraz formuła $ZA \rightarrow ZB$ jest tezą. Ponadto, dzięki (W1), formuła $A \geq B$ jest tezą i formuła $B \geq A$ jest tezą. Dlatego, na mocy (A0) i (R0), formuła $PA \equiv PB$ jest tezą, formuła $DB \equiv DA$ jest tezą, formuła $ZA \equiv ZB$ jest tezą oraz formuła $(A \geq B) \wedge (B \geq A)$ jest tezą.

(W3) Tezami są wszystkie formuły o następujących postaciach:

(T1) $P(A \rightarrow B) \rightarrow (PA \rightarrow PB)$,

(T2) $D(A \rightarrow B) \rightarrow (DA \rightarrow DB)$,

(T3) $P(A \rightarrow B) \rightarrow (ZB \rightarrow ZA)$,

(T4) $P(A \rightarrow B) \rightarrow (DA \rightarrow DB)$,

(T5) $P(A \wedge B) \equiv (PA \wedge PB)$,

(T6) $D(A \wedge B) \equiv (DA \wedge DB)$,

(T7) $Z(A \wedge B) \equiv (ZA \wedge ZB)$,

(T8) $ZA \rightarrow D({\sim}A)$,

(T9) $Z(ZA \wedge A)$,

(T10) ${\sim}PB \rightarrow (PA \rightarrow {\sim}P({\sim}A))$,

(T11) ${\sim}DB \rightarrow (DA \rightarrow {\sim}D({\sim}A))$,

(T12) ${\sim}ZB \rightarrow (ZA \rightarrow {\sim}Z({\sim}A))$,

(T13) ${\sim}DB \rightarrow (PA \rightarrow {\sim}P({\sim}A))$,

(T14) ${\sim}DB \rightarrow (ZA \rightarrow {\sim}Z({\sim}A))$,

(T15) $(DA \rightarrow {\sim}D({\sim}A)) \rightarrow (DA \rightarrow {\sim}ZA)$

(T16) $(DA \rightarrow {\sim}D({\sim}A)) \rightarrow (PA \rightarrow {\sim}ZA)$

(T17) ${\sim}DB \rightarrow (DA \rightarrow {\sim}ZA)$,

(T18) ${\sim}DB \rightarrow (PA \rightarrow {\sim}ZA)$,

(T19) $(A \geq {\sim}A) \equiv DA$,

(T20) $A \geq B \rightarrow (DB \rightarrow DA)$,

(T21) $A \geq A$,

(T22) $((A \geq B) \wedge (B \geq C)) \rightarrow (A \geq C)$, (T23) $DA \rightarrow (A \geq B)$,

(T24) $ZB \rightarrow (A \geq B)$.

Zarys dowodu:

(T1) Na mocy klasycznego rachunku zdań każda formuła o postaci $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ jest tezą. Dlatego, dzięki (R1) także każda formuła o postaci $P((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow PB$ tezą, a dalej, z uwagi na (T4), każda formuła o postaci $(P(A \rightarrow B) \wedge PA) \rightarrow PB$ jest tezą. Zatem ostatecznie każda formuła o postaci $P(A \rightarrow B) \rightarrow (PA \rightarrow PB)$ jest tezą. Dla (T2) dowód przebiega podobnie.

(T3) Na mocy klasycznego rachunku zdań każda formuła o postaci $((A \rightarrow B) \wedge {\sim}B)) \rightarrow {\sim}A$ jest tezą. Dlatego, dzięki (R1) także każda formuła o postaci $P((A \rightarrow B) \wedge {\sim}B)) \rightarrow P({\sim}A)$ tezą, a dalej, z uwagi na (T4), każda formuła o postaci $(P(A \rightarrow B) \wedge P({\sim}B)) \rightarrow P({\sim}A)$ jest tezą. Zatem ostatecznie, dzięki (D3), każda formuła o postaci $P(A \rightarrow B) \rightarrow (ZB \rightarrow ZA)$ jest tezą.

(T4) Na mocy (T2) każda formuła o postaci $D(A \rightarrow B) \rightarrow (DA \rightarrow DB)$ jest tezą. Z drugiej strony, dzięki (A3), każda formuła o postaci $P(A \rightarrow B) \rightarrow D(A \rightarrow B)$ jest tezą. Zatem ostatecznie także każda formuła o postaci $P(A \rightarrow B) \rightarrow (DA \rightarrow DB)$ jest tezą.

(T5) – (T7) Pokażemy najpierw, że każda formuła o postaci $P(A \wedge B) \rightarrow (PA \wedge PB)$, $D(A \wedge B) \rightarrow (DA \wedge DB)$ oraz $Z(A \vee B) \rightarrow (ZA \wedge ZB)$ jest tezą. Z uwagi na (A0) każda formuła o postaci $(A \wedge B) \rightarrow A$, $(A \wedge B) \rightarrow B$, $A \rightarrow (A \vee B)$ i $B \rightarrow (A \vee B)$ jest tezą. Zatem, na mocy (R1) i (R2) każda formuła o postaci $P(A \wedge B) \rightarrow PA$, $P(A \wedge B) \rightarrow PB$, $D(A \wedge B) \rightarrow DA$, $D(A \wedge B) \rightarrow DB$, a na mocy (W1) także każda formuła o postaci $Z(A \vee B) \rightarrow ZA$ i $Z(A \vee B) \rightarrow ZB$ jest tezą. Stąd, dzięki (A0) i (R0), każda formuła o postaci $P(A \wedge B) \rightarrow (PA \wedge PB)$, $D(A \wedge B) \rightarrow (DA \wedge DB)$ oraz $Z(A \vee B) \rightarrow (ZA \wedge ZB)$ jest tezą. Z drugiej strony, na mocy (A1) i (A2) każda formuła o postaci $(PA \wedge PB) \rightarrow P(A \wedge B)$ i $(DA \wedge DB) \rightarrow D(A \wedge B)$ jest tezą, zaś dzięki (D3) także każda formuła o postaci $(ZA \wedge ZB) \rightarrow Z(A \vee B)$ jest tezą. Dlatego ostatecznie każda formuła o postaci $P(A \wedge B) \equiv (PA \wedge PB)$, $D(A \wedge B) \equiv (DA \wedge DB)$ oraz $Z(A \vee B) \equiv (ZA \wedge ZB)$ jest tezą.

(T8) Na mocy (A3) każda formuła o postaci $P({\sim}A) \rightarrow D({\sim}A)$ jest tezą, dlatego, dzięki (D3), także każda formuła o postaci $ZA \rightarrow D({\sim}A)$ jest tezą.

(T9) Dzięki (A4), na mocy klasycznego rachunku zdań oraz (W2), każda formuła o postaci $P{\sim}(P({\sim}A) \wedge A)$ jest tezą. Dlatego, z uwagi na (D3), także każda formuła o postaci $Z(ZA \wedge A)$ jest tezą.

(T10) i (T11) Na mocy (A1) każda formuła o postaci $(PA \wedge P(\sim A)) \rightarrow P(A \wedge \sim A)$ jest tezą. Z drugiej strony, na mocy (A0), każda formuła o postaci $(A \wedge \sim A) \rightarrow B$ jest tezą i dlatego, dzięki (R1), także każda formuła o postaci $P(A \wedge \sim A) \rightarrow PB$ jest tezą. Zatem każda formuła o postaci $(PA \wedge P(\sim A)) \rightarrow PB$ jest tezą, dlatego, na mocy klasycznego rachunku zdań, także każda formuła o postaci $\sim PB \rightarrow (PA \rightarrow \sim P(\sim A))$ jest tezą. Dla (T11) dowód przebiega podobnie.

(T12) Na mocy (W3) i klasycznego rachunku zdań każda formuła o postaci $(ZA \wedge Z(\sim A)) \rightarrow Z(A \vee \sim A)$ jest tezą. Z drugiej strony, na mocy (A0), każda formuła o postaci $B \rightarrow (A \vee \sim A)$ jest tezą i dlatego, dzięki (W1), także każda formuła o postaci $Z(A \vee \sim A) \rightarrow ZB$ jest tezą. Zatem każda formuła o postaci $(ZA \wedge Z(\sim A)) \rightarrow ZB$ jest tezą, dlatego, na mocy klasycznego rachunku zdań, także każda formuła o postaci $\sim ZB \rightarrow (ZA \rightarrow \sim Z(\sim A))$ jest tezą.

(T13) $\sim DB \rightarrow (PA \rightarrow \sim P(\sim A))$ Na mocy (A3) każda formuła o postaci $PB \rightarrow DB$ jest tezą, dlatego każda formuła o postaci $\sim DB \rightarrow \sim PB$ także jest tezą. Z kolei, dzięki (T10), każda formuła o postaci $\sim PB \rightarrow (PA \rightarrow \sim P(\sim A))$ jest tezą. Zatem ostatecznie każda formuła o postaci $\sim DB \rightarrow (PA \rightarrow \sim P(\sim A))$ także jest tezą.

(T14) $\sim DB \rightarrow (ZA \rightarrow \sim Z(\sim A))$ Dzięki (T7) każda formuła o postaci $Z(\sim B) \rightarrow DB$ jest tezą. Dlatego każda formuła o postaci $\sim DB \rightarrow \sim Z(\sim B)$ także jest tezą. Z kolei dzięki (T12) formuła $\sim Z(\sim B) \rightarrow (ZA \rightarrow \sim Z(\sim A))$ jest tezą. Dlatego ostatecznie każda formuła o postaci $\sim DB \rightarrow (ZA \rightarrow \sim Z(\sim A))$ jest tezą.

(T15) i (T16) Na mocy (A3) każda formuła o postaci $P(\sim A) \rightarrow D(\sim A)$ jest tezą. Dlatego, na mocy klasycznego rachunku zdań, każda formuła o postaci $(DA \wedge P(\sim A)) \rightarrow (DA \wedge D(\sim A))$ jest tezą i każda formuła o postaci $(DA \rightarrow \sim D(\sim A)) \rightarrow (DA \rightarrow \sim P(\sim A))$ jest tezą. Stąd, dzięki (D3), każda formuła o postaci $(DA \rightarrow \sim D(\sim A)) \rightarrow (DA \rightarrow \sim ZA)$ jest tezą. Jednak na mocy (A3) każda formuła o postaci $PA \rightarrow DA$ jest tezą, dlatego każda formuła o postaci $(DA \rightarrow \sim D(\sim A)) \rightarrow (PA \rightarrow \sim ZA)$ także jest tezą.

(T17) i (T18) Dzięki (T15) i (T16) każda formuła o postaci $(DA \rightarrow \sim D(\sim A)) \rightarrow (DA \rightarrow \sim ZA)$ jest tezą i każda formuła o postaci $(DA \rightarrow \sim D(\sim A)) \rightarrow (PA \rightarrow \sim ZA)$ jest tezą. Z kolei na mocy (T11) każda formuła o postaci $\sim DB \rightarrow (DA \rightarrow \sim D(\sim A))$ jest tezą. Dlatego ostatecznie każda formuła o postaci $\sim DB \rightarrow (DA \rightarrow \sim ZA)$ jest tezą i każda formuła o postaci $\sim DB \rightarrow (PA \rightarrow \sim ZA)$ jest tezą.

(T19) Na mocy klasycznego rachunku zdań każda formuła o postaci $(\sim A \rightarrow A) \equiv A$ jest tezą. Zatem, z uwagi na (W2), każda formuła o postaci D(~A → A) ≡ DA także jest tezą. Stąd, dzięki (D4), każda formuła o postaci (A ≥ ~A) ≡ DA jest tezą.

(T20) Na mocy (D4) każda formuła o postaci A ≥ B ≡ D(B → A) jest tezą, zaś dzięki (T2) każda formuła o postaci D(B → A) → (DB → DA) jest tezą. Stąd każda formuła o postaci A ≥ B → (DB → DA) także jest tezą.

(T21) Oczywiście każda formuła o postaci A → A jest tezą i dlatego, dzięki (W1), każda formuła o postaci D(A → A) także jest tezą. Dlatego, na mocy (D4), każda formuła o postaci A ≥ A jest tezą.

(T22) Na mocy klasycznego rachunku zdań każda formuła o postaci ((B → A) ∧ (C → B)) → (C → A) jest tezą. Stąd, dzięki (R2) i (T5), każda formułą o postaci (D(B → A) ∧ D(C → B)) → D(C → A) jest tezą i ostatecznie, z uwagi na (D4), każda formuła o postaci ((A ≥ B) ∧ (B ≥ C)) → (A ≥ C) jest tezą.

(T23) Na mocy klasycznego rachunku zdań każda formuła o postaci A → (B → A) jest tezą. Dlatego, dzięki (R2), każda formuła o postaci DA → D(B → A) także jest tezą i ostatecznie, z uwagi na (D4), każda formuła o postaci DA → (A ≥ B) jest tezą.

(T24) Na mocy klasycznego rachunku zdań każda formuła o postaci ~B → (B → A)jest tezą. Dlatego, dzięki (R2), każda formuła o postaci D(~B) → D(B → A) i z uwagi na (D4) każda formuła o postaci D(~B) → (A ≥ B) jest tezą. Ale dzięki (T7) każda formuła o postaci ZA → D(~A) jest tezą, zatem ostatecznie każda formuła o postaci ZB → (A ≥ B) jest tezą.

Poczynimy teraz kilka niezbędnych ustaleń terminologicznych i wskażemy na pewne wnioski, które z nich wynikają. Dodajmy, że w dalszej części posługiwać się będziemy symbolem inkluzji ⊆ oraz symbolami sumy zbiorów ∪ i przekroju zbiorów ∩, a także symbolem dopełnienia zbioru −. Napis **X** ⊆ **Y**, będziemy więc czytać *zbiór* **X** *zawiera się w zbiorze* **Y**, napis **X** ∪ **Y** oznaczać będzie sumę zbiorów **X** i **Y**, napis **X** ∩ **Y** oznaczać będzie iloczyn zbiorów **X** i **Y**, zaś napis −**X** oznaczać będzie dopełnienie zbioru **X**. Wykorzystamy także symbol należenia ∈. Dlatego napis x ∈ **Y** będziemy czytać *x należy do* **Y** lub *x jest elementem* **Y**. Przez $\{x_0, x_1, x_2,..., x_k\}$ oznaczać będziemy skończony zbiór, którego jedynymi elementami są obiekty $x_0, x_1, x_2,..., x_k$. Przez {x: j(x)} oznaczać zaś będziemy klasę takich i tylko takich obiektów, które spełniają ustalony warunek j. Symbol ∅ oznaczać będzie zbiór pusty.

Dla dowolnie ustalonego zbioru formuł **X** powiemy że formuła A jest *wyprowadzalna ze zbioru* **X** w *logice NO* wtedy i tylko wtedy, gdy są takie formuły B_0, B_1, B_2,....B_n należące do zbioru **X**, że formuła ($B_0 \wedge B_1 \wedge B_2 \wedge .... \wedge B_n$) → A jest tezą logiki NO. Powiemy, że zbiór formuł **X** jest *niesprzeczny w logice NO* wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma takiej formuły A, że zarówno A jak i ~A są wyprowadzalne z **X**. W przeciwnym przypadku, powiemy że zbiór **X** jest *sprzeczny*. Z definicji tej wynika, że jeśli jakikolwiek zbiór formuł jest sprzeczny, to pewien jego skończony podzbiór także jest sprzeczny, oraz że jeśli jakikolwiek zbiór formuł **X** jest niesprzeczny, a przy tym formuła A nie jest wyprowadzalna z **X**, to zbiór **X** ∪ {~A} także jest niesprzeczny. Jak już wcześniej powiedziano, przez logikę NO rozumieć będziemy klasę wszystkich jej tez. Logika NO to zatem najmniejszy (ze względu na inkluzję) zbiór zawierający wszystkie aksjomaty i domknięty na *Modus Ponens* oraz na reguły monotoniczności dla powinności i monotoniczności dla dobra. Dlatego każda formuła jest wyprowadzana z logiki NO dokładnie wtedy, gdy jest jej tezą. Zauważmy także, że gdyby logika NO była sprzeczna, to każdy zbiór formuł także byłby sprzeczny w tej logice. Pokażemy jednak, że logika NO jest faktycznie niesprzeczna.

Aby to uczynić, wykorzystamy standardowy język klasycznego rachunku zdań. Alfabet zawiera przeliczalnie wiele liter zdaniowych: $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots$, symbole spójników logicznych negacji: ~, i koniunkcji ∧ , i implikacji materialnej →, oraz nawiasy lewy: (, i prawy). Zbiór poprawnie zbudowanych formuł zdaniowych definiujemy indukcyjnie w zwykły sposób. Symbole pozostałych spójników logicznych ∨ i ≡ wprowadzamy na mocy skrótów definicyjnych w zwykły sposób. Zdefiniujmy teraz odwzorowanie O z języka logiki NO w język klasycznego rachunku takie, że:

(O0) $\mathrm{T}(p_n) = q_{n+1}$,

(O1) T(~A) = ~T(A),

(O2) T(A ∧ B) = T(A) ∧ T(B),

(O3) T(A → B) = T(A) → T(B),

(O4) T(PA) = q_0 → T(A),

(O5) T(DA) = q_0 → T(A).

Zatem dla dowolnej formuły A z języka logiki NO istnieje dokładnie jedna formuła O(A) z języka klasycznego rachunku zdań, która jest obrazem formuły A ze względu na odwzorowanie O. Można łatwo pokazać, że dla dowolnej formuły A z języka logiki NO, jeśli A jest tezą tej logiki, to O(A) jest tautologią klasycznego rachunku zdań. Wynika stąd, że dla dowolnej formuły A, A oraz ~A nie mogą być jednocześnie tezami logiki NO. Gdyby bowiem tak było, O(A) oraz ~O(A) byłyby tautologiami klasycznego rachunku zdań, co jest niemożliwe. Dlatego, dla dowolnej formuły A, A oraz ~A nie mogą być zarazem wyprowadzalne ze zbioru wszystkich tez logiki NO.

Jako wniosek odnotujmy także, że przynajmniej niektóre formuły o postaci PA → A lub o postaci DA → A nie są tezami logiki NO. Jeśli bowiem A jest taką ustaloną formułą, że O(A) nie jest tautologią klasycznego rachunku zdań, to formuła (q_0 → O(A))O(A) także nie jest tautologią klasycznego rachunku zdań, a zatem ani PA → A, ani DA → A nie jest tezą logiki NO. Na przykład żadna formuła o postaci $Pp_n \rightarrow p_n$ lub o postaci $Dp_n \rightarrow p_n$ nie jest tezą logiki NO.

Powiemy, że zbiór formuł **X** jest *zupełny* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej formuły A, albo A należy do **X**, albo ~A należy do **X**. Zbiór formuł, który jest zarazem niesprzeczny, jak i zupełny będziemy nazywać *maksymalnie niesprzecznym* zbiorem formuł. Na mocy twierdzenia znanego jako *Lemat Lindenbauma* każdy niesprzeczny zbiór formuł jest podzbiorem pewnego maksymalnie niesprzecznego zbioru formuł. Zauważmy, że jeśli **X** jest maksymalnie niesprzecznym zbiorem formuł, to każda formuła wyprowadzalna z **X** należy do **X**. Można łatwo pokazać, że dla dowolnego maksymalnie niesprzecznego zbioru formuł **X** oraz dla dowolnych formuł A i B, ~A należy do **X** wtedy i tylko wtedy, gdy A nie należy do **X**, (A ∧ B) należy do **X** wtedy i tylko wtedy, gdy A należy do **X** i B należy do **X** oraz (A → B) należy do **X** wtedy i tylko wtedy, gdy jeśli A należy do **X**, to B należy do **X**.

W dalszej części przedstawimy semantyczne ujęcie zarysowanych wcześniej idei. Wykorzystamy przy tym pewną wersję standardowej semantyki relacyjnej dla modalnych logik zdaniowych. Najpierw wprowadzimy pojęcie modelu aksjologicznego dla opisanego wcześniej języka, następnie zaś pojęcie formuły obowiązującej w ustalonym modelu aksjologicznym oraz pojęcie formuły obowiązującej logicznie. Jak się okaże, zbiór wszystkich tez logiki norm i ocen jest identyczny ze zbiorem wszystkich formuł obowiązujących logicznie.

4. Modelem aksjologicznym, lub krótko — modelem, nazywać będziemy strukturę $M = \langle W, \{P_0, P_1, P_2, ...\}, R^A, R^O, \vDash \rangle$ taką, że W jest niepustym zbiorem, którego elementy nazywać będziemy możliwymi okolicznościami, możliwymi stanami świata lub światami możliwymi; $\{P_0, P_1, P_2, ...\}$ jest ciągiem, którego każdy wyraz jest pewnym podzbiorem zbioru W, dla dowolnie ustalonego k, P_k to zbiór takich i tylko takich światów możliwych, w których prawdziwa jest formuła p_k; R^A i R^O to funkcje, które każdemu elementowi zbioru W przyporządkowują pewien podzbiór zbioru W, dla dowolnie ustalonego świata w,

$R^A(w)$ to zbiór światów akceptowalnych z punktu widzenia świata w, zaś $R^O(w)$ to zbiór światów optymalnych z punktu widzenia świata w; $\vDash$ to natomiast relacja, której dziedzinę stanowi zbiór światów możliwych W, zaś przeciwdziedzinę zbiór wszystkich poprawnie zbudowanych formuł zdaniowych, napis $w\vDash A$ czytamy: *formuła A jest prawdziwa w świecie w, w modelu M*, lub *świat w weryfikuje formułę A, w modelu M*. Dla dowolnie ustalonego modelu M i dowolnie ustalonej formuły A, przez treść logiczną formuły A w modelu M, symbolicznie $|A|^M$, rozumiemy zbiór wszystkich i tylko takich światów możliwych, które weryfikują formułę A w modelu M. Dlatego $|A|^M = \{w: w\vDash A\}$. Zakładamy, że dla dowolnych w i v, należących do W, funkcje R^A i R^O spełniają następujące warunki:

(C0) $R^O(w)\subseteq R^A(w)$,

(C1) jeśli $v\in R^A(w)$, to $v\in R^A(v)$,

(C2) jeśli $v\in R^O(w)$, to $R^O(v)=\{v\}$.

Zakładamy dalej, że dla dowolnego w relacja $\vDash$ spełnia następujące dwa warunki:

(C3) Dla dowolnej liczby naturalnej k, $w\vDash p_k$ dokładnie wtedy, gdy $w\in P_k$.

(C4) Dla dowolnie ustalonych formuł A i B,
$w\vDash (A \wedge B)$ dokładnie wtedy, gdy $w\vDash A$ oraz $w\vDash B$,
$w\vDash (A\rightarrow B)$ dokładnie wtedy, gdy jeśli $w\vDash A$, to $w\vDash B$,
$w\vDash \sim A$ dokładnie wtedy, gdy nie jest tak, że $w\vDash A$,
$w\vDash PA$ dokładnie wtedy, gdy $R^A(w)\subseteq|A|^M$,
$w\vDash DA$ dokładnie wtedy, gdy $R^O(w)\subseteq|A|^M$.

Jako wniosek odnotujmy, że na mocy ustaleń definicyjnych (D1), (D2), (D3) i (D4) dla dowolnie ustalonych formuł A i B mamy:

(a) $w\vDash (A \vee B)$ dokładnie wtedy, gdy $w\vDash A$ lub $w\vDash B$,

(b) $w\vDash (A \equiv B)$ dokładnie wtedy, gdy $w\vDash A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w\vDash B$,

(c) $w\vDash ZA$ dokładnie wtedy, gdy $|A|^M\subseteq -R^A(w)$,

(d) $w\vDash A \geq B$ dokładnie wtedy, gdy $R^O(w)\cap|B|^M\subseteq|A|^M$.

Punkty (a) i (b) wynikają wprost z ustaleń definicyjnych (D1) i (D2) oraz z warunków nałożonych na relację $\vDash$. Aby pokazać, że zachodzi punkt (c), zauważmy, że na mocy (D3), $w\vDash ZA$ dokładnie wtedy, gdy $w\vDash P(\sim A)$, natomiast z uwagi na własności relacji $\vDash$, $w\vDash P(\sim A)$ dokładnie wtedy, gdy $R^A(w)\subseteq|\sim A|^M$. Z kolei $R^A(w)\subseteq|\sim A|^M$ dokładnie wtedy, gdy $R^A(w)\subseteq -|A|^M$, zaś $R^A(w)\subseteq -|A|^M$ dokładnie wtedy, gdy $|A|^M\subseteq -R^A(w)$. Aby następnie pokazać, że zachodzi punkt (d), zauważmy najpierw, że na mocy (D4), $w\vDash A \geq B$ dokładnie wtedy, gdy $w\vDash D(B \rightarrow A)$, natomiast z uwagi na własności relacji$\vDash$, $w\vDash D(B \rightarrow A)$ dokładnie wtedy, gdy $R^O(w)\subseteq|B\rightarrow A|^M$. Wystarczy teraz pokazać, że $R^O(w)\subseteq|B\rightarrow |^M$ dokładnie wtedy, gdy $R^O(w)\cap|B|^M\subseteq|A|^M$. Załóżmy zatem, że $R^O(w)\subseteq|B \rightarrow A|^M$. Stąd $R^O(w)\subseteq-|B|^M\cup|A|^M$, czyli $R^O(w) = R^O(w)\cap(-|B|^M\cup|A|^M)$ i dlatego $R^O(w) = (R^O(w)\cap-|B|^M)\cup(R^O(w)\cap|A|^M)$ oraz $R^O(w) \cap|B|^M = (R^O(w)\cap-|B|^M\cap|B|^M)\cup(R^O(w)\cap|B|^M\cap|A|^M)$. Zatem $R^O(w)\cap|B|^M = (R^O(w)\cap|B|^M\cap |A|^M)$ i dlatego $R^O(w)\cap|B|^M\subseteq|A|^M$. Załóżmy z kolei, że $R^O(w)\cap|B|^M\subseteq|A|^M$. Stąd $(R^O(w)\cap|B|^M)\cup|A|^M = |A|^M$, czyli $(R^O(w)\cup|A|^M)\cap(|B|^M\cup|A|^M) = |A|^M$ i dlatego $(R^O(w)\cup|A|^M)\cap(|B|^M\cup|A|^M)\cup\text{-}|B|^M = |A|^M \cup-|B|^M$. Zatem $(R^O(w)\cup|A|^M\cup\text{-}|B|^M) = |A|^M\cup-|B|^M$ i dlatego $R^O(w)\subseteq\text{-}|B|^M\cup|A|^M$, czyli $R^O(w)\subseteq|B\rightarrow A|^M$.

Powiemy teraz, że *formuła A obowiązuje w modelu M* dokładnie wtedy, gdy dla dowolnego w należącego do W, $w\vDash A$, oraz że *formuła A obowiązuje logicznie* dokładnie wtedy, gdy dla dowolnego modelu M A obowiązuje w M.

Zauważmy, że są takie struktury o postaci $M = < W, \{P_0, P_1, P_2, ...\}, R^A, R^O, \vDash>$, które spełniają podane wyżej warunki. Istnieją zatem modele aksjologiczne. Podamy teraz przykład takiego modelu. Rozważmy mianowicie strukturę $M^* = < W^*, \{P_0{}^*, P_1{}^*, P_2{}^*, ...\}, R^{A^*}, R^{O^*}, \vDash^*>$ taką, że W^* jest zbiorem wszystkich takich zbiorów formuł, które są maksymalnie niesprzeczne w logice NO. Ponieważ logika NO jest niesprzeczna, zbiór W^* jest niepusty. Ciąg $\{P_0{}^*, P_1{}^*, P_2{}^*, ...\}$ jest nieskończonym ciągiem podzbiorów W^*, takim, że dla dowolnej liczby naturalnej *k*, $P_k{}^*$ jest zbiorem wszystkich maksymalnie niesprzecznych zbiorów formuł, które jako swój element zawierają literę zdaniową p_k. R^{A^*} jest funkcją odwzorowującą zbiór W^* w zbiór potęgowy 2^{W^*} taką, że dla dowolnych *v* i *w* należących do W^*, $v\in R^{A^*}(w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{C: PC\in w\} \subseteq v$. R^{O^*} jest zaś funkcją odwzorowującą zbiór W^* w zbiór potęgowy 2^{W^*} taką, że dla dowolnych v i w należących do W^*, $v \in R^{O^*}(w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{C: DC \in w\} \subseteq v$. Z kolei $\vDash^*$ jest relacją, której dziedzinę stanowi zbiór W^*, zaś przeciwdziedzinę zbiór wszystkich poprawnie zbudowanych formuł zdaniowych, taką, że dla dowolnego w należącego do W^* mamy:

dla dowolnej liczby naturalnej k, $w\vDash^* p_k$ dokładnie wtedy, gdy $w \in P_k{}^*$,

zaś dla dowolnie ustalonych formuł A i B,

$w\vDash^*(A \wedge B)$ dokładnie wtedy, gdy $w\vDash^*A$ oraz $w\vDash^*B$,

$w\vDash^*(A \rightarrow B)$ dokładnie wtedy, gdy jeśli $w\vDash^*A$, to $w\vDash^*B$,

$w\vDash^*{\sim}A$ dokładnie wtedy, gdy nie jest tak, że $w\vDash^*A$,

$w\vDash^*PA$ dokładnie wtedy, gdy $R^{A^*}(w)\subseteq|A|^{M^*}$,

$w\vDash^{*}DA$ dokładnie wtedy, gdy $R^{O^*}(w)\subseteq|A|^{M^*}$.

Aby udowodnić, że struktura $M^* = < W^*, \{P_0{}^*, P_1{}^*, P_2{}^*, ...\}, R^{A^*}, R^{O^*}, \vDash^* >$ jest modelem aksjologicznym, wystarczy pokazać, że struktura ta spełnia warunki (C0), (C1) i (C2).

Aby pokazać, że spełniony jest warunek (C0), wykażemy, że dla dowolnego w należącego do W^*, $R^{O^*}(w) \subseteq R^{A^*}(w)$. Załóżmy zatem, że v należy do $R^{O^*}(w)$, czyli $\{B: DB \in w\} \subseteq v$. Ale każda formuła o postaci $PB \rightarrow DB$, jako teza, należy do w i dlatego $\{B: PB\in w\} \subseteq \{B: DB \in w\}$. Zatem $\{B: PB \in w\} \subseteq v$, czyli v należy do $R^{A^*}(w)$.

Aby z kolei pokazać, że zachodzi warunek (C1), wykażemy, że dla dowolnych v i w należących do W^*, jeśli $v\in R^{A^*}(w)$, to $v\in R^{A^*}(v)$. Załóżmy zatem, że v należy do $R^{A^*}(w)$, czyli $\{B: PB\in w\}\subseteq v$. Ale każda formuła o postaci $P(PB \rightarrow B)$, jako teza, należy do w i dlatego każda formuła o postaci $PB \rightarrow B$ należy do v. Zatem $\{B: PB\in v\}\subseteq v$, czyli v należy do $R^{A^*}(v)$.

Aby wreszcie pokazać, że spełniony jest warunek (C2) ,wykażemy, że dla dowolnych v i w należących do W^*, jeśli $v \in R^{O^*}(w)$, to $R^{O^*}(v) = \{v\}$. Załóżmy więc, że v należy do $R^{O^*}(w)$, czyli $\{B: DB \in w\} \subseteq v$. Ale każda formuła o postaci $D(DB \equiv B)$, jako teza, należy do w i dlatego każda formuła o postaci $DB \equiv B$ należy do v. Zatem $\{B: DB \in v\} = v$ i dlatego, jeśli $\{B: DB\in v\}\subseteq u$, to $u = v$, czyli $R^{O^*}(v)=\{v\}$.

Kończy to dowód, że struktura $M^* = < W^*, \{P_0{}^*, P_1{}^*, P_2{}^*, ...\}, R^{A^*}, R^{O^*}, \vDash^*>$ jest modelem aksjologicznym. Model ten będziemy nazywać *modelem kanonicznym*.

Sformułujemy teraz i udowodnimy podstawowe twierdzenie dotyczące modelu kanonicznego.

Twierdzenie 1. Dla dowolnej ustalonej formuły A i dowolnego w należącego do W^*, mamy $w\square^*A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A\in w$.

Dowód. Dowód będzie przebiegać przez indukcję ze względu na budowę formuły. Definicja modelu kanonicznego, a dokładniej, definicja ciągu $\{P_0{}^*, P_1{}^*, P_2{}^*, ...\}$ zapewnia, że dla dowolnej litery zdaniowej p_k, i dla dowolnego w należącego do W^*, $w\vDash^*p_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p_k \in w$. Spełniony jest zatem warunek wyjściowy.

W przypadku spójników negacji, koniunkcji i implikacji krok indukcyjny dokonuje się na mocy definicji zbioru W^*, dzięki maksymalnej niesprzeczności dowolnego w należącego do W^*. Z uwagi na to ~A należy do w wtedy i tylko wtedy, gdy A nie należy do w, $(A \wedge B)$ należy do w wtedy i tylko wtedy, gdy A należy do w i B należy do w oraz $(A \rightarrow B)$ należy do w wtedy i tylko wtedy, gdy jeśli A należy do w, to B należy do w.

W przypadku dowolnie ustalonej formuły o postaci PA jako hipotezę indukcyjną załóżmy, że dla dowolnego $w \in W^*$, $w\vDash^*A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in w$. Przypuśćmy teraz, że $PA \in w$. Stąd, dla dowolnego v, jeśli $v \in R^{A^*}(w)$, to $\{B: PB \in w\} \subseteq v$ i dlatego $A \in v$. Zatem, na mocy hipotezy indukcyjnej, jeśli $v \in R^{A^*}(w)$, to $v \vDash^* A$. Stąd, $R^{A^*}(w) \subseteq |A|^{M^*}$, i dlatego $w \vDash^* PA$.

Przypuśćmy z kolei, że $w \vDash^* PA$. Zatem $R^{A^*}(w) \subseteq |A|^{M^*}$ i dlatego, jeśli $v \in R^{A^*}(w)$, to $v \vDash^* A$. Stąd, na mocy definicji modelu kanonicznego oraz hipotezy indukcyjnej dla dowolnego v, jeśli $\{B: PB \in w\} \subseteq v$, to $A \in v$. Stąd żaden maksymalnie niesprzeczny zbiór formuł nie zawiera w sobie zbioru $\{B: PB \in w\} \cup \{\sim A\}$ i dlatego zbiór ten jest sprzeczny. Zatem pewien jego skończony podzbiór $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_k, \sim A\}$ także jest sprzeczny i dlatego formuła $(B_0 \wedge B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_k) \rightarrow A$ jest tezą i należy do w. Stąd, na mocy (R1) i (W3), formuła $(PB_0 \wedge PB_1 \wedge PB_2 \wedge \ldots \wedge PB_k) \rightarrow PA$ także należy do w. Ale formuły $PB_0, PB_1, PB_2, \ldots, PB_k$ należą do w, i dzięki (R0) i (W3) formuła PA także należy do w.

W przypadku dowolnie ustalonej formuły o postaci DA dowód przebiega analogicznie.

Przyjrzymy się teraz wybranym schematom formuł, które budziły wcześniej pewne intuicyjne wątpliwości i pokażemy, że pewne podpadające pod nie formuły nie są formułami obowiązującymi logicznie. Dla każdej takiej formuły wskażemy taki model aksjologiczny, w których nie obowiązuje ta formuła.

Rozważmy najpierw schemat $P(A \rightarrow PA)$. Jeśli teraz $M = \langle W, \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}, R^A, R^O, \vDash \rangle$ będzie takim modelem, zaś A taką formułą, że dla pewnych światów możliwych u, v i w należących do W, $v \in R^A(w)$, $v \in |A|^M$, $u \in R^A(v)$ oraz $u \notin |A|^M$, to nieprawda, że $w \vDash P(A \rightarrow PA)$. Modelem takim jest np. struktura taka, że $W = \{u, v, w\}$, $R^A(w) = \{v\}$, $R^A(v) = \{v, u\}$, $R^A(u) = \{u\}$, $P_0 = \{v\}$ oraz $R^O(w) = \{\ \}$, $R^O(w) = \{v\}$ i $R^O(u) = \{u\}$, formułą taką jest zaś p_0.

Spójrzmy z kolei na schematy $DA \rightarrow Z(\sim A)$ i $DA \rightarrow PA$. Jeśli teraz $M = \langle W, \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}, R^A, R^O, \vDash \rangle$ będzie takim modelem, zaś A taką formułą, że dla pewnego świata możliwego w należącego do W, $R^O(w) \subseteq |A|^M$ oraz $R^A(w) \not\subseteq |A|^M$, to nieprawda, że $w \vDash DA \rightarrow Z(\sim A)$ oraz nieprawda, że $w \vDash DA \rightarrow PA$.

Rozważmy dalej model $M = \langle W, \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}, R^A, R^O, \vDash \rangle$ taki, że dla pewnego świata możliwego w należącego do W, $R^O(w) = \emptyset$. Wtedy, dla dowolnie ustalonej formuły A, nieprawda, że $w \vDash DA \rightarrow \sim D(\sim A)$. Świat w falsyfikuje zatem dowolną formułę o postaci $DA \rightarrow \sim D(\sim A)$. Jeśli z kolei weźmiemy pod uwagę taki model $M = \langle W, \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}, R^A, R^O, \vDash \rangle$ i taki świat możliwy w należący do W, że $R^A(w) = \emptyset$, to świat w będzie także falsyfikował wszystkie formuły o postaci $PA \rightarrow \sim P(\sim A)$, $ZA \rightarrow \sim Z(\sim A)$, $DA \rightarrow \sim ZA$ oraz $PA \rightarrow \sim ZA$.

5. W poprzednich dwóch częściach formuły wyznaczające rozważaną teorię logiczną były opisywane i badane na dwa różne sposoby: syntaktycznie — w części 3. i semantycznie — w części 4. Połączenie tych dwóch podejść umożliwia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Dowolna formuła jest tezą logiki NO wtedy i tylko wtedy, gdy jest formułą obowiązującą logicznie.

Dowód: Aby pokazać, że dowolnie ustalona formuła jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy jest formułą obowiązującą logicznie, wystarczy pokazać, że każda teza jest formułą obowiązującą logicznie i każda formuła, która nie jest tezą, nie jest formułą obowiązującą logicznie. Dowód pierwszej implikacji wymaga wykazania, że wszystkie aksjomaty to formuły obowiązujące logicznie oraz że reguły inferencyjne (R1) i (R2) prowadzą od formuł obowiązujących logicznie do formuł obowiązujących logicznie. Można to łatwo pokazać. Aby udowodnić implikację odwrotną, przypuśćmy, że formuła A nie jest tezą. Zatem zbiór {~A} jest niesprzeczny. Stąd jest taki maksymalnie niesprzeczny zbiór formuł w, że {~A} ⊆ *w*. Dlatego, dzięki definicji modelu kanonicznego M*, dla pewnego w, takiego, że *w* ∈ W*, ~A należy do w, i tym samym A nie należy do w. Zatem, na mocy *twierdzenia 1*, dla pewnego w, takiego, że *w* ∈ W*, nie jest tak, że w⊨ A. Zatem formuła A nie jest formułą obowiązującą w modelu kanonicznym i dlatego nie jest formułą obowiązującą logicznie.

Podejścia syntaktyczne i semantyczne wyznaczają zatem tę samą klasę formuł charakteryzujących logikę NO.

Bibliografia

Czeżowski, T. (1989). *O przedmiocie aksjologii*. W: *idem*, *Pisma z etyki i teorii wartości*, s. 115–116. Wrocław: Zakład Narodowy Imienia Ossolińskich Wydawnictwo.

Elzenberg, H. (2002). Konstrukcja pojęcia wartości. W: *idem*, *Pisma aksjologiczne*, s. 71–95. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej.

Z Ginsbergów Blausteinowa, E. (1931). W sprawie pojęć samoistności i niesamoistności. W: *Księga Pamiątkowa Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie, 12.II. 1904–12. II. 1929*, s. 143–168. Lwów: Polskie Towarzystwo Filozoficzne, Książnica Atlas.

Ginsberg, E. (1982). On the Concepts of Existential Dependence and Independence. W: *Parts and Moments*, red. B. Smith, s. 265–287. Munich: PhilosophiaVerlag.

Russell, B. (2010). *Principles of Mathematics*. London-New York: Routledge Classics.

Stalnaker, R.C. (1980). *Logical Semiotics*. W: *Modern Logic*, red. E. Agazzi, s. 439–456. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

On the formal aspects of axiological norms and evaluations

Abstract: It can be said that an object is valuable exactly when it is as it ought to be. On the other hand, however, it can also be said that an object has a certain value when it is good that it is as it is. That the object is as it ought to be means that the object is such-and-such, and at the same time it ought to be that it is such-and-such. And that it is good that the object is such-and-such means that the object is such-and-such, and at the same time it is good when it is such-and-such. Thus, the concept of the value of an object is closely related to the concept of the ought of a certain state of affairs and to the concept of the goodness of a certain state of affairs. However, the logical relations occurring between judgments of the form ought to be so and so and good when it is so and so are not entirely clear. The article will present a logical analysis of such relationships. The concept of evil present in judgments about the character bad when it is so and so will also be the subject of consideration.

Elżbieta Magner
Uniwersytet Wrocławski | ORCID: 0000-0002-9329-0136

Spójnik międzyzdaniowy *i* a funktor koniunkcji w logice. Trzy podejścia

Abstrakt: W artykule przedstawiłam trzy różne podejścia do odpowiedników z języka naturalnego dla funktora koniunkcji w logice: semantyczne, semantyczno-pragmatyczne i formalne.

Relację bycia odpowiednikiem można traktować jako most między wyrażeniami z języka naturalnego a funktorami logiki formalnej. Most taki tworzą drogi będące różnymi podejściami do zagadnienia odpowiedników.

Z analizy tych podejść wyłaniają się dokładnie trzy drogi. Pierwsza, najprostsza, prowadzi od wyrażeń z języka naturalnego do przypisania im danego funktora logicznego. Prostota tej drogi polega na tym, że dane wyrażenie jest po prostu sposobem czytania danego funktora. Wchodząc na drugą drogę, zaczynamy odczuwać pewne trudności z budowaniem mostu. Trudności te są związane nie tylko z samymi wyrażeniami będącymi kandydatami na odpowiedniki danych funktorów, ale także ze zdaniami, które mają one łączyć. Jednak silna idea chęci praktycznego zastosowania logiki nakazuje, mimo dostrzeżonych trudności, budować most. Przyjmuje się zatem, że dane wyrażenia w większym lub mniejszym stopniu będą odpowiednikami danych funktorów w logice. I dochodzimy do trzeciej drogi — najbardziej wymagającej. Od wyrażeń języka naturalnego żąda się na niej spełnienia wytycznych logiki formalnej. Most odpowiedników między językiem naturalnym a logiką formalną staje się bardzo wąski.

W niniejszej pracy przerzucimy most między spójnikiem międzyzdaniowym *i* a funktorem koniunkcji. Most, który będą tworzyć trzy drogi.

Funktor koniunkcji, symbolicznie zapisywany □, należy do zbioru funktorów prawdziwościowych. Funktory prawdziwościowe zaś to „funktory zdaniotwórcze o argumentach zdaniowych, których znaczenie określane jest przez to, iż przy danej wartości logicznej argumentów zdaniowych takiego funktora jednoznacznie określona jest wartość logiczna całego zdania zbudowanego z tego funktora i z tych argumentów" (Ziembiński, 2001, s. 77). Zdanie, którego głównym funktorem jest funktor koniunkcji, nazywamy zdaniem koniunkcyjnym. Takie zdanie jest prawdziwe wówczas, gdy obydwa (wszystkie) jego koniunkty są prawdziwe; w innych przypadkach zdanie to przyjmuje wartość fałszu. Dla zdania koniunkcyjnego charakterystyczne jest to, że nieistotna jest kolejność jego argumentów, czyli ma cechę komutatywności.

Słowa kluczowe: funktor, spójnik międzyzdaniowy i, koniunkcja

Funktory prawdziwościowe powinny mieć swoje odpowiedniki w języku naturalnym. Zygmunt Ziembiński podkreśla, że ta powinność, „z punktu widzenia praktycznych zastosowań logiki ma szczególną doniosłość" (Ziembiński, 2001, s. 82).

Za przykłady posłużą nam trzy zdania zaczerpnięte z *Mitologii* Jana Parandowskiego. W każdym z nich występuje spójnik *i*. Spójnik ten tworzy zdania złożone, a jego argumentami są za każdym razem dwa zdania proste.

a) *Apollo uczył Hiakintosa strzelać z łuku i grać na cytrze* (Parandowski, s. 48).

b) „[Posąg Heliosa] *uległ trzęsieniu ziemi i rozbił się na kawałki* (...)" (Parandowski, s. 69).

c) „[Tezeusz] ...*wsiadł na okręt i odpłynął*" (Parandowski, s. 135).

Powyższe zdania złożone składają się tylko z prawdziwych zdań prostych, co czyni każde z tych zdań złożonych prawdziwym.

A teraz postawię pytanie: czy spójnik międzyzdaniowy *i* użyty w tych zdaniach może być odpowiednikiem funktora koniunkcji? Odpowiedź wytyczą trzy drogi.

1. Podejście pierwsze

Barbara Stanosz zwraca uwagę na to, że „pewne spójniki języka naturalnego są prawdziwościowe tylko przy jednym z kilku swoich znaczeń" (Stanosz, 2000, s. 27). Takim spójnikiem jest właśnie *i*. Jest ono prawdziwościowe tylko przy znaczeniu koniunkcyjnym, gdyż tylko wówczas wartość logiczna zdania złożonego zależy od wartości logicznej poszczególnych członów tego zdania i jest obojętna na ich kolejność[1]. Autorka podaje przykład, w którym nie mamy do czynienia z *i* koniunkcyjnym. Wskazuje *i* synonimiczne z wyrażeniem *a następnie*. W takiej sytuacji wartość logiczna zdania złożonego zależy nie tylko od wartości logicznej zdań składowych, ale także od ich treści, a dokładniej od następstwa czasowego łączącego te zdania. W takim wypadku, kiedy *i* nie jest prawdziwościowe, nie jest także odpowiednikiem funktora koniunkcji w logice.

W tym kontekście przyjrzyjmy się teraz naszym przykładom.

a) *Apollo uczył Hiakintosa strzelać z łuku i grać na cytrze.*

Zdanie to jest prawdziwe, bo składa się ono z dwóch zdań prawdziwych (a1 i a2):

a1) *Apollo uczył Hiakintosa strzelać z łuku*.

a2) *Apollo uczył Hiakintosa grać na cytrze*.

Wartość logiczna zdania a) zależy od wartości logicznych zdań składowych a1) i a2). A czy istotna jest kolejność poszczególnych argumentów?

Zdania a1) i a2) są prawdziwe. Zdanie:

a’) *Apollo uczył Hiakintosa grać na cytrze i strzelać z łuku.*

jest też prawdziwe. Zdanie a) po przekształceniu komutatywnym na a’) nie zmieniło swojego znaczenia. Zdania a) i a’) mają te same warunki prawdziwościowe. Wobec tego spójnik *i* jest odpowiednikiem koniunkcji w logice.

a) *Apollo uczył Hiakintosa strzelać z łuku i grać na cytrze.* $(p \land q)$

a’) *Apollo uczył Hiakintosa grać na cytrze i strzelać z łuku.* $(q \land p)$

Rozważmy teraz kolejny przykład, który informuje nas o przypadku posągu Heliosa.

b) *Uległ trzęsieniu ziemi i rozbił się na kawałki.*

Czy wartość logiczna zdania złożonego zależy od wartości logicznej poszczególnych członów? Tak, ale nie tylko. Zdania b1) i b2) są prawdziwe:

b1) *Uległ trzęsieniu ziemi*.

b2) *Rozbił się na kawałki*.

Stąd zdanie b) będące koniunkcją zdań b1) i b2) też jest prawdziwe. Jednak w tym przypadku nie mamy spełnionego drugiego warunku nałożonego na funktor koniunkcji, czyli przemienności. *I* jest użyte w znaczeniu *dlatego*. Pojawia się więc czynnik wyjaśniający: posąg Heliosa uległ trzęsieniu ziemi, dlatego rozbił się na kawałki. Mamy więc

---

1 Określenie *i* koniunkcyjne wydaje się być identyczne z tym, którego używa Olgierd Wojtasiewicz. Uważa on, że właśnie takie *i* jako jedyne (spośród trzech jeszcze innych wymienianych przez niego) nadaje się na odpowiednik funktora koniunkcji w logice. (Por. Wojtasiewicz, 1972, s. 109–144).

tutaj przyczynę – trzęsienie ziemi, i skutek – rozbity pomnik Heliosa. Dlatego też zdanie:

b') *Rozbił się na kawałki i uległ trzęsieniu ziemi,*

będzie miało inne warunki prawdziwościowe niż zdanie b). Bo choć wartość logiczna zdań b1) i b2) nie uległa zmianie, są prawdziwymi zdaniami, a spójnik łączący dane zdania się nie zmienił, to zdanie b') jest fałszywe. Zdanie b') informuje nas, że pomnik Heliosa rozbił się na kawałki, a potem uległ trzęsieniu ziemi. Jednak w *Mitologii* stoi inaczej: to trzęsienie ziemi wpłynęło na zniszczenie tegoż pomnika. W tym przypadku spójnik *i* nie jest odpowiednikiem funktora koniunkcji w logice, gdyż zdanie b) jest prawdziwe, a zdanie b') będące komutatywnym jego przekształceniem jest fałszywe.

I kolejny przykład:

c) *Tezeusz wsiadł na okręt i odpłynął*.

Mamy tu podobną sytuację do tej, którą opisuje Barbara Stanosz: spójnik *i* jest synonimem zwrotu *a następnie*. „Występując w tym znaczeniu [*i*] nie jest spójnikiem prawdziwościowym, gdyż wartość logiczna zdania, które wówczas tworzy, zależy nie tylko od wartości logicznej zdań składowych, lecz także od ich treści" (Stanosz, 2000, s. 27). Przyjrzyjmy się bliżej naszemu przykładowi. Zdania c1 (*Tezeusz wsiadł na okręt.*) i c2 (*Tezeusz odpłynął.)*, będące argumentami spójnika *i* w zdaniu c), są prawdziwe. Zdanie c) również jest prawdziwe. Zdanie c) mówi, że Tezeusz wpierw wsiadł na okręt, a potem (a następnie) odpłynął. Mamy więc do czynienia tu z sekwencyjnością, z następstwem czasowym. Z tego względu zdanie c) ma inne warunki prawdziwości niż zdanie c') będące jego komutatywnym przekształceniem:

c') *Tezeusz odpłynął i* w*siadł na okręt*.

I choć także w tym przypadku zdania c1) i c2) są prawdziwe, to zdanie c') jest fałszywe. Barbara Stanosz podkreśla, że „nie są to zatem zdania koniunkcyjne, wartość logiczna koniunkcji nie zależy bowiem od kolejności jej członów" (Stanosz, 2000, s. 28).

Podsumujmy. W podejściu pierwszym spójnik *i* może być odpowiednikiem koniunkcji logicznej tylko w jednym przypadku — kiedy mamy do czynienia z *i* koniunkcyjnym. Wówczas wartość logiczna zdania złożonego zależy tylko od wartości logicznej jego członów i jest nieczuła na przekształcenie komutatywne[2].

2 Komutatywność *i* koniunkcyjnego nie jest jednak bezproblemowa (Por. Magner, 2019, s. 355–368).

2. Podejście drugie

W drugim podejściu mamy nieco odmienną sytuację. Tu autorzy zauważają pewne problemy ze spójnikiem *i*, ale wychodzą z założenia, że funktorom prawdziwościowym „w mniejszym czy większym przybliżeniu odpowiadają [...] co do znaczenia niektóre spójniki międzyzdaniowe mowy potocznej" (Ziembiński, 2001, s. 78). Podkreśla się tu, że takie odpowiadanie „z punktu widzenia praktycznych zastosowań logiki ma szczególną doniosłość" (Ziembiński, 2001, s. 82).

Zygmunt Ziembiński, podobnie jak Barbara Stanosz, zauważa, że w niektórych przypadkach „znaczenie jest wyznaczone nie tylko przez związki między wartością logiczną całego zdania złożonego oraz wartością logiczną zdań składowych, lecz i przez treść tych zdań" (Por. Ziembiński, 2001, s. 86). Zwraca także uwagę, że w mowie potocznej niekiedy ważna jest kolejność zdań składowych, może ona choćby określać następstwo czasowe, zaś w logice dla funktora prawdziwościowego kolejność jest obojętna (Por. Ziembiński, 2002, s. 86).

Przy takim podejściu nie mamy wykluczenia ze zbioru odpowiedników funktora koniunkcji tych spójników *i*, które nie spełniają warunku komutatywności. Tylko mówi się, że to są te odpowiedniki, które w mniejszym przybliżeniu odpowiadają funktorowi koniunkcji w logice (przykłady b) i c)).

a) *Apollo uczył Hiakintosa strzelać z łuku i grać na cytrze.* ($p \land q$)

b) *Posąg Heliosa uległ trzęsieniu ziemi i rozbił się na kawałki.* ($p \land q$)

c) *Tezeusz wsiadł na okręt i odpłynął.* ($p \land q$)

Co jednak zrobić z jaskrawym brakiem komutatywności w przykładach b) i c)? Wyraźna odpowiedź nie zostaje tutaj udzielona, jednak znajdziemy pewną istotną wskazówkę: zastosowanie praktyczne[3].

Podobnie jak Zygmunt Ziembiński do sprawy podchodzą Wojciech Patryas i Jacek Petzel. Wojciech Patryas pisze, że „spójnikowi koniunkcji odpowiada w języku polskim słowo *i*, a do pewnego stopnia także słowa *oraz* tudzież *a*" (Patryas, 1996, s. 15). Zauważa jednak, że „słowo *i* nie w pełni odpowiada spójnikowi koniunkcji i to co najmniej z trzech powodów" (Patryas, 1996, s. 15). Pierwszym powodem jest to, że spójnikiem koniunkcji łączymy w języku naturalnym tylko zdania, które mają jakiś związek treściowy. Funktor koniunkcji zaś łączy zdania,

3 Zastosowanie praktyczne otwiera perspektywę pragmatyczną. Patrząc przez nią, można pokazać, że wszystkie rodzaje spójnika międzyzdaniowego *i*, które wymienia Olgierd Wojtasiewicz (*i* koniunkcyjne, *i* sekwencyjne, *i* eksplikatywne, *i* akcesoryjne), spełniają warunki nałożone na funktor koniunkcji w logice. (Por. Magner, 2005, s. 101–114).

które tego warunku nie muszą spełniać[4]. Drugi powód to możliwość sytuacji, w której zdania wskazują pewien kontrast mimo zbieżności treściowej. Wówczas w języku naturalnym zamiast spójnika *i* stosuje się spójnik *a*. Funktor koniunkcji jest nieczuły na kontrast treściowy występujący między łączonymi zdaniami. Trzecim powodem jest to, że spójnik *i* uwzględnia kolejność zdarzeń opisywaną przez łączone przez niego zdania. Funktor koniunkcji jest na to obojętny.

Warte podkreślenia jest to, że „spójniki nie w pełni odpowiadają spójnikom analizowanym w logice…" (Patryas, 1996, s. 157). Autor używa wyrażenia *nie w pełni*, czyli *niezupełnie*, nie mówi jednak, że powyższe problemy wykluczają jakieś użycia spójnika *i* z należenia do zbioru odpowiedników funktora koniunkcji[5].

W książce *Logika dla prawników* po prostym stwierdzeniu, że „w logice koniunkcję wyrażamy jako *i*, a przyjętym dla jej prezentacji zapisem formalnym będzie □" (Petzel, 2002, s. 97) następuje wymienienie kilku jeszcze innych odpowiedników, takich jak: *oraz*, *a chociaż*, *lecz*, *pomimo że*, *lecz także*, *a także*, *jak również*. Zauważa się także istnienie innych sposobów wyrażania koniunkcji, takich jak odpowiednia intonacja czy też zastosowanie przecinka. Jacek Petzel podkreśla też wielość odpowiedników koniunkcji logicznej w mowie potocznej, których użycie najczęściej zależy od treści zdań łączonych za pomocą danych wyrażeń. Dla przykładu spójnik *a* jest używany w sytuacji, kiedy występuje pewien kontrast między treściami zdań. Niezależnie jednak od tego, czy przy określaniu wartości logicznej zdania złożonego posiłkujemy się dodatkowo treścią zdań składowych, wszystkie wymienione powyżej

---

4 Uwaga ta często jest eksponowana w różnych podręcznikach. Zdanie *Babcia Gertruda ma dziś urodziny i Warszawa jest stolicą Polski.* z czysto logicznego punktu widzenia nie budzi żadnych zastrzeżeń, ale w języku naturalnym nosiłoby miano osobliwego.

5 Inaczej na sprawę patrzy Jacek Petzel. Umieszcza on Wojciecha Patryasa w gronie autorów wykluczających spójnik *i* będący synonimiczny z *a następnie* ze zbioru odpowiedników funktora koniunkcji: „niektórzy autorzy uznają, że słowo *i* nie pełni funkcji funktora prawdziwościowego również w zdaniach złożonych, w których używane jest dla połączenia ze sobą dwóch zdań stwierdzających fakty, między którymi występuje określone następstwo czasowe" (Petzel, 2002, s. 98). Jacek Petzel stanowisko *niektórych autorów* ilustruje przykładem: „Adam Małysz przypiął narty i ruszył w dół skoczni"(*ibidem*) i pisze, że *i* użyte w tym zdaniu „nie jest przez nich uznawane za funktor prawdziwościowy, a to ze względu na fakt, że w przypadku zmiany w analizowanym zdaniu kolejności zdań otrzymujemy zdanie „Adam Małysz ruszył w dół skoczni i przypiął narty" (Petzel, 2002, s. 98). I dalej czytamy: „autorzy ci twierdzą, że zdanie to jest zdaniem fałszywym, chociaż oba zdania połączone słowem *i* są prawdziwe" (Petzel, 2002, s. 98). I tu następuje odwołanie się do książki Wojciecha Patryasa *Elementy logiki dla prawników*. Jednak we wskazanej książce podczas analizy zdania z *i* sekwencyjnym nie mówi się o prawdziwości czy też fałszywości danego zdania, ale o jego poprawności / niepoprawności: „W odróżnieniu bowiem od poprawnego zdania »Michał założył łyżwy i Michał wyjechał na lód« zdanie »Michał wyjechał na lód i Michał założył łyżwy« uchodzi za niepoprawne, gdyż sugeruje, że wyjazd na lód poprzedziło założenie łyżew" (Patryas, 1996, s. 15).

wyrażenia są odpowiednikami funktora koniunkcji w logice. Należy jednak zachować pewną ostrożność przy stwierdzaniu, że w danym wyrażeniu mamy do czynienia z odpowiednikiem koniunkcji logicznej, gdyż „nawet słowo *i* nie jest we wszystkich możliwych wypowiedziach odpowiednikiem koniunkcji logicznej" (Petzel, 2002, s. 98). Autor jednak podaje jako wykluczające takie sytuacje, gdy *i* jest spójnikiem łączącym nazwy, czy też łączącym zdania pytajne albo rozkazujące. Apeluje o dokładną analizę danych wypowiedzi, aby poprawnie przypisać dany funktor logiczny, jednak nie wyklucza ze zbioru odpowiedników na przykład takich międzyzdaniowych *i*, które są synonimiczne z *a następnie*. Znajdziemy tam uwagę, że „niektórzy autorzy uznają, że słowo *i* nie pełni funkcji funktora prawdziwościowego również w zdaniach złożonych, w których używane jest dla połączenia ze sobą dwóch zdań stwierdzających fakty, między którymi występuje określone następstwo czasowe" (Petzel, 2002, s. 98). Autor rozdziału *Rachunek zdań* w książce *Logika dla prawników* do tej grupy jednak nie należy.

Podsumowując powyższe podejście, można powiedzieć, że nie mamy tu do czynienia z wykluczeniem ze zbioru odpowiedników funktora koniunkcji takich wyrażeń, które na przykład wiążą się z sekwencyjnością spójnika *i*. Zauważa się tu pewne problemy związane z odpowiednikami, ale one nie wpływają na zmniejszenie ich liczby. Mówi się za to, że takie spójniki nie w pełni (Patryas) albo w mniejszym stopniu (Ziembiński) pełnią rolę odpowiedników funktorów logicznych.

3. Podejście trzecie

Podejście to charakteryzuje brak refleksji autorów nad problemami dotyczącymi spójnika *i* jako odpowiednika funktora koniunkcji. Wynika to najczęściej z braku takiej potrzeby, gdyż często są to pozycje o charakterze formalnym. Zagadnienie odpowiedników sprowadza się do sposobu czytania danego funktora w języku naturalnym. Taką sytuację mamy w książce Ludwika Borkowskiego *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*. Znajdziemy tam uwagę, że „Koniunkcję $p \wedge q$ czytamy: p *i* q" (Borkowski, 1991, s. 14). Podobnie, bo z tą różnicą, że autor wychodzi od języka naturalnego i idzie do formalnego, czyni Tadeusz Batóg, pisząc: „Przyjmujemy, że spójniki międzyzdaniowe: *i*, *oraz*, *ale*, *lecz*, *a*, *natomiast* są równoznaczne pomiędzy sobą. (Co prawda ostatnie cztery spośród nich mogą być używane zamiast *i* względnie *oraz* tylko w niektórych kontekstach, ale decydują o tym jedynie względy stylistyczne, a nie rzeczowe). Wszystkie te spójniki będziemy zapisywali za pomocą jednego krótkiego symbolu ∧" (Batóg, 2003, s. 12).

Trochę inaczej do sprawy podchodzi Józef Wajszczyk. Używa on przykładów z języka naturalnego jako ilustracji dla rozważań formalnych. Przykłady są dobrane w taki sposób, aby nie sprawiały problemów i nie rodziły pytań choćby o brak komutatywności. Oto one:

„Nowy York jest większy od Warszawy i Warszawa jest większa od Nowego Yorku" (Wajszczyk, 2001, s. 19).

„Warszawa leży nad Wisłą i Olsztyn jest miastem wojewódzkim" (Wajszczyk, 2001, s. 22).

„Warszawa leży nad Wisłą i jest stolicą Polski.

Warszawa leży nad Wisłą i jest stolicą Francji.

Warszawa leży nad Odrą i jest stolicą Polski.

Warszawa leży nad Odrą i jest stolicą Francji" (Wajszczyk, 2001, s. 27).

Podsumowując, zauważamy, że w tym przypadku zakłada się po prostu, że spójnik międzyzdaniowy *i* jest odpowiednikiem funktora koniunkcji.

4. Podsumowanie

Rodzi się pytanie o plusy i minusy powyższych podejść. Plusem pierwszego są rozważania dotyczące znaczenia spójnika *i*. Jednak zawężenie zbioru odpowiedników tylko do *i* koniunkcyjnego oddala logikę od języka naturalnego. Trzecie podejście, wybierające formalną ścieżkę, pomija rozważania nad różnymi zawiłościami związanymi z naturalnojęzykowym znaczeniem słowa *i*. Sprowadza je to sposobu czytania symbolu koniunkcji. Jest to pewien minus. Drugie zaś, nie pomijając rozważań językowych dotyczących spójnika *i*, nie ogranicza odpowiedników funktora koniunkcji tylko do *i* koniunkcyjnego. Można to uznać za plus dla tego podejścia. Zostają zaznaczone pewne problemy, ale nie prowadzą one do odrzucenia tych spójników, które je sprawiają. Taki sposób otwiera w jakimś sensie perspektywę pragmatyczną.

Zostały przedstawione trzy podejścia do zagadnienia dotyczącego odpowiedników funktora koniunkcji w logice na przykładzie zdań ze spójnikiem międzyzdaniowym *i*. Pierwsze, które można nazwać czysto semantycznym, pozwala być odpowiednikiem funktora koniunkcji w logice tylko spójnikowi *i* koniunkcyjnemu. Drugie, które można określić jako semantyczne z cichym przyzwoleniem pragmatycznym, głosi, że w mniejszym czy większym stopniu każdy spójnik międzyzdaniowy *i* jest odpowiednikiem funktora koniunkcji. Trzecie — formalne — nie stawia pytań o odpowiedniki funktora koniunkcji z języka naturalnego. Przyjmuje po prostu, że $p \wedge q$ czytamy *p i q*.

Bibliografia

Batóg, T. (2003). *Podstawy logiki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Borkowski, L. (1991). *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*. Lublin: Towarzystwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego Jana Pawła II.

Magner, E. (2005). Koniunkcja w ekstensjonalnej logice, a spójnik międzyzdaniowy „i" w języku naturalnym. *Studia Philosophiae Christianae* 1, s. 101–114.

Magner, E. (2019). Pewne problemy z komutatywnością „i" koniunkcyjnego *Studia semiotyczne* 2, s. 355–368.

Parandowski, J. *Mitologia. Wierzenia i podania Greków i Rzymian*, https://biblioteka.kijowski.pl (dostęp: 30.11.2024).

Patryas, W. (1996). *Elementy logiki dla prawników.* Poznań: Ars Boni Et Aequi.

Petzel, J. (2002). Rachunek zdań. W: S. Lewandowski, H. Machińska, A. Malinowski, J. Petzel, *Logika dla prawników*, s. 91–136. Warszawa: Wydawnictwo LexisNexis.

Stanosz, B. (2000). *Wprowadzenie do logiki formalnej*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Wajszczyk, J. (2001). *Wstęp do logiki z ćwiczeniami*. Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytet Warmińsko-Mazurski.

Wojtasiewicz, O. (1972). Formalna i semantyczna analiza polskich spójników przyzdaniowych i międzyzdaniowych oraz wyrazów pokrewnych, *Studia semiotyczne* 3, s. 109–144.

Ziembiński, Z. (2001). *Logika praktyczna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

The interpropositional connective "i" (equivalent to "and" in English) and the functor of conjunction in logic: Three approaches

Abstract: In the article I presented three approaches to natural language equivalents of the functor of conjunction in logic: semantic, semantic-pragmatic and formal.

Keywords: connective, the "i" connective, conjunction

Roman Murawski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu | ORCID: 0000-0002-2392-4869

O pracach logicznych Emila L. Posta

Abstrakt: W pracy zostaną przedstawione główne idee zawarte w pracach logicznych Emila L. Posta (1897–1954) i ocenione ich znaczenie dla rozwoju logiki matematycznej i podstaw matematyki. W szczególności omówione zostaną: wkład Posta w badania nad rachunkiem zdań oraz znaczenie jego prac dotyczących systemów kanonicznych, niezupełności i nierozstrzygalności. Pokazane zostanie także, w jaki sposób prace Posta przyczyniły się do powstania teorii rekursji jako samodzielnej dziedziny badań oraz będzie zwrócona uwaga na jego poglądy filozoficzne i metodologiczne.

Zanim przejdziemy do omawiania prac logicznych Emila L. Posta, przybliżymy pokrótce jego życiorys. Post urodził się 11 lutego 1897 roku w Augustowie w polsko-żydowskiej rodzinie Arnolda i Pearl Postów. W tym samym roku jego ojciec wyjechał do USA na zaproszenie swojego brata, gdzie z sukcesem działał w rodzinnym biznesie odzieżowym i futrzarskim. W maju 1904 roku reszta rodziny, to znaczy matka Emila wraz z nim i dwoma córkami, Anną i Ethel, wyemigrowała do USA, do Nowego Jorku. Tam Emil uczęszczał do Townsend Harris High School, szkoły średniej dla uzdolnionych uczniów. Interesował się astronomią, jednak w wieku 12 lat stracił w wypadku samochodowym lewą rękę, co stanowiło zasadniczą przeszkodę w zostaniu w przyszłości zawodowym astronomem. W tej sytuacji zdecydował się studiować matematykę w City College of New York, gdzie w roku 1917 uzyskał licencjat

(*Bachelor of Sciences*, B.S.) w zakresie matematyki. W roku 1920 otrzymał stopień doktora (*Doctor of Philosophy*, Ph.D.) z matematyki na Columbia University — promotorem był Cassius Jackson Keyser. Następnie w latach 1920–1921 odbył studia podoktorskie na Princeton University (*post-doctoral Procter Fellowship*). Pracował następnie jako nauczyciel matematyki w szkole średniej, a od roku 1936 w City College of New York. W roku 1929 ożenił się z Gertrudą Singer (1900–1956) — mieli jedną córkę Phyllis Goodman (1932–1995). Od roku 1921 cierpiał na chorobę maniakalno-depresyjną. Zmarł 21 kwietnia 1954 roku w wieku 57 lat na atak serca po leczeniu elektrowstrząsami w szpitalu dla umysłowo chorych w Nowym Jorku.

Większość prac naukowych Emila Posta zaliczyć należy do logiki i podstaw matematyki. W sumie opublikował on 1 monografię, 14 artykułów i 19 abstraktów, z których 4 artykuły i 8 abstraktów zaliczyć można do algebry i analizy, a pozostałe, tzn. monografię, 10 artykułów i 11 abstraktów właśnie do logiki i podstaw matematyki[1].

Pierwszą pracą logiczną Posta była jego rozprawa doktorska z roku 1920. Została ona opublikowana w roku następnym w czasopiśmie „American Journal of Mathematics" pod tytułem *Introduction to a general theory of elementary propositions* (Post, 1921). Z jednej strony odwołuje się ona do *Principia Mathematica* Whiteheada i Russella (1910–1913)[2], a z drugiej dostrzec można w niej wpływy *A Survey of Symbolic Logic* C.I. Lewisa (1918). Rozprawa Posta zawierała pierwsze wyniki metamatematyczne dotyczące systemu logiki. Post wyodrębnił tę część systemu *Principiów*, który dziś zwiemy rachunkiem zdań. Wprowadził także metodę matryc prawdziwościowych i pokazał, że system aksjomatyczny rachunku zdań zaproponowany przez Whiteheada i Russella jest pełny, niesprzeczny i rozstrzygalny[3]. Pokazał też, że system ten jest — w terminologii stosowanej dzisiaj — zupełny w sensie Posta, co oznacza, że jeśli dodać do niego jakąś niedowodliwą formułę jako nowy aksjomat, to wówczas ten rozszerzony system będzie sprzeczny.

Warto zauważyć, że w rozprawie doktorskiej Posta pojawiła się też idea logik wielowartościowych otrzymanych poprzez uogólnienie matryc dwuwartościowych do matryc n-wartościowych ($n \geq 2$) oraz pomysł ogólnej metody badania systemów logicznych (traktowanych jako

1 Por. Davis (1994). Dodajmy, że jedna z prac Posta została opublikowana pośmiertnie — por. Post (1965).

2 Dodajmy, że Post brał udział w seminarium Keysera na Columbia University poświęconym właśnie Principiom.

3 Zauważmy, że Post nie mówił o rozstrzygalności, a o problemie skończoności.

systemy inferencyjne) za pomocą przekształcania symboli[4], co świadczy o tym, że rozumiał on sformalizowane systemy logiczne jako systemy kombinatoryczne. Znajdują się tam także uwagi o jego badaniach systemów 2-wartościowych funkcji logicznych (prawdziwościowych) zamkniętych na operację superpozycji. Pokazał też w szczególności, że każda taka 2-wartościowa funkcja logiczna jest definiowalna za pomocą funkcji negacji i alternatywy.

Te ostatnio wspomniane pomysły zostały rozwinięte przez Posta w monografii *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic* (1941). Znajduje się tam m.in. wynik zwany dzisiaj twierdzeniem Posta o funkcjonalnej zupełności — twierdzenie to podaje warunek konieczny i dostateczny na to, by układ 2-wartościowych funkcji logicznych był zupełny w tym sensie, że każda 2-wartościowa funkcja logiczna jest definiowalna za pomocą funkcji tego układu. Niestety we wspomnianej monografii nie znajdziemy dowodu tego twierdzenia spełniającego obowiązujące dziś standardy. Powodem mogła być „barokowa" notacja stosowana przez Posta (była ona w istocie nieprecyzyjną adaptacją nieścisłej notacji Jevonsa, której ten ostatni używał w *Pure Logic*, por. Jevons, 1864). Pierwszy poprawny dowód twierdzenia Posta spełniający dzisiejsze wymogi podali Pelletier i Martin (1990).

Podczas pobytu jako stypendysta na Princeton University w latach 1920–1921 Post zajmował się głównie wspomnianymi wyżej systemami kanonicznymi. Systemy te legły u podstaw teorii języków formalnych, a wyniki osiągnięte przez Posta antycypowały fundamentalne rezultaty Gödla i Churcha z lat trzydziestych XX wieku dotyczące niezupełności i nierozstrzygalności (piszę o nich poniżej).

Punktem wyjścia badań Posta była następująca idea: na całe *Principia Mathematica* Whiteheada i Russella można patrzeć jako na system kanoniczny typu A, to znaczy jako na system ciągów symboli z pewnego alfabetu, które można przekształcać wedle przyjętego systemu reguł. Celem, jaki stawiał sobie Post, była odpowiedź na pytanie o rozstrzygalność (przypomnijmy, że Post mówił nie o rozstrzygalności, a o problemie skończoności) systemów typu A. Chciał mianowicie znaleźć metodę, która pozwalałaby dla dowolnej danej formuły (ciągu symboli) systemu *Principia* rozstrzygnąć w skończonej liczbie kroków, czy jest ona formalnie dowodliwa, czy też nie. Skoro *Principia*, jak sądzono, są formalizacją całej matematyki, więc metoda taka dawałaby metodę rozstrzygania dla całej matematyki. Oprócz wspomnianych systemów kanonicznych typu A Post rozważał także systemy, które nazywał typu B i typu C.

4 Później Post nazywał takie systemy systemami kanonicznymi typu A.

Nie będziemy tu wchodzić w szczegóły techniczne. Powiedzmy tylko, że systemy kanoniczne typu C nazywa się dziś w literaturze systemami produkcji Posta.

Post pokazał równoważność systemów kanonicznych typu A, B i C. Pokazał też, że ta część *Principia Mathematica*, która odpowiada rachunkowi predykatów pierwszego rzędu może zostać sformalizowana jako system kanoniczny typu B, a w konsekwencji także jako system typu C. Co więcej, zbiór wszystkich formuł dowodliwych systemu *Principia* może być traktowany jako zbiór ciągów symboli, które mogą zostać wygenerowane przez pewien system kanoniczny typu C. Dodajmy jeszcze, że Post udowodnił twierdzenie o postaci normalnej dla systemów typu C. Jedną z konsekwencji tego twierdzenia jest to, że metoda rozstrzygania dla systemów typu C indukowałaby metodę rozstrzygania dla całego systemu *Principia*. Zauważmy jeszcze — dla ścisłości historycznej — że Post rozpoczął swoje badania w omawianym kierunku od rozważania systemów normalnych szczególnej postaci. Nazywa się je systemami tag. Post przypuszczał, że systemy tego typu są rekurencyjnie nierozstrzygalne. Fakt ten został udowodniony przez M. Minsky'ego w 1961 roku.

Zauważmy, że procedura generowania wyrażeń przez system kanoniczny typu C jest w istocie podobna do procesu generowania funkcji obliczalnych z pewnych danych funkcji wyjściowych poprzez iterowanie pewnych określonych operacji na funkcjach. Udowodniono, że definicja efektywnej obliczalności bazująca na systemach kanonicznych Posta jest równoważna definicji obliczalności w języku λ-definiowalności, algebraicznej definicji klasy funkcji rekurencyjnych czy definicji za pomocą maszyn Turinga. To implikuje, że systemy kanoniczne typu C można traktować jako pewien formalizm pozwalający sprecyzować intuicyjne pojęcie efektywnej obliczalności. Można więc sformułować tezę analogiczną do tezy Churcha — i nazwać ją tezą Posta — głoszącą, że każdy skończenie dany język jest generowany przez reguły pewnego normalnego systemu kanonicznego.

Poprzez zastosowanie metody przekątniowej Cantora Post doszedł do wniosku, że problem rozstrzygalności dla systemów normalnych ma rozwiązanie negatywne. Próbował pokazać, że w matematyce istnieją zdania absolutnie nierozstrzygalne. Sądził, że jego metoda może pozwolić na uzyskanie zdania nierozstrzygalnego w systemie *Principia Mathematica*, którego prawdziwość można jednak ustalić za pomocą rozważań metamatematycznych. W 1921 roku naszkicował dowód tego stwierdzenia. Pisał (por. Post, 1965, s. 421–422):

> Twierdzimy, że problem skończoności dla klasy wszystkich systemów normalnych jest nierozstrzygalny, tzn., że nie istnieje żadna skończona metoda, która pozwalałaby w sposób jednorodny stwierdzić w przypadku dowolnego systemu normalnego i dowolnego ciągu jego symboli [tzn. symboli języka tego systemu — uwaga moja, R.M.], czy ciąg ten jest, czy też nie jest generowany przez operacje tego systemu z jego ciągów wyjściowych[5].

Tego typu rozważania doprowadziły go do wniosków dotyczących niezupełności, tzn. do wniosku, że (por. Post, 1943, s. 215):

> nie tylko każda (finitarna) logika symboliczna jest niezupełna względem pewnej ustalonej klasy wyrażeń [...], ale że każda taka logika jest rozszerzalna względem tej klasy wyrażeń[6].

W tejże pracy pisał także (Post, 1943, s. 200):

> Żaden normalny system dedukcyjny nie jest równoważny zupełnemu systemowi logicznemu (jeśli taki istnieje); lepiej, jeśli dany jest jakiś normalny system dedukcyjny, to istnieje inny, w którym można udowodnić więcej twierdzeń (mówiąc nieprecyzyjnie) niż w tym pierwszym[7].

I dodawał (Post, 1943, s. 215):

> Zupełna logika symboliczna jest niemożliwa[8].

Łatwo zauważyć, że wyniki tego typu w jakimś sensie antycypowały słynne wyniki Gödla i Churcha dotyczące niezupełności i nierozstrzygalności systemów pierwszego rzędu (por. Gödel, 1931; Church, 1936a i Church, 1936b). Post zdawał sobie sprawę z tego, że jego wyniki są, jak się wyraził, „fragmentaryczne” (*fragmentary*). Nigdy też ich nie opublikował i zrezygnował z dalszych badań w tym kierunku.

Interesujące jest, jak Post zareagował na publikację słynnej pracy Gödla „Über formal unentscheidbare ...” (1931). Z jednej strony widać pewne rozczarowanie, że to nie jego nazwisko będzie kojarzone z tym wynikami, które w jakimś sensie antycypował, a z drugiej podziwiał geniusz Gödla i jego wkład do logiki. W kartce pocztowej wysłanej do Gödla z 19 października 1938 roku pisał (por. Davis, 1994, xvii):

---

5 „We [...] conclude that the finiteness problem for the class of all normal systems is unsolvable, that is, there is no finite method which would uniformly enable us to tell of an arbitrary normal system and arbitrary sequence on the letters thereof whether that sequence is or is not generated by the operations of the system from the primitive sequence of the system”.

6 „[...] not only was every (finitary) symbolic logic incomplete relative to a certain fixed class of propositions [...] but that every such logic was extendable relative to that class of propositions”.

7 „No normal-deductive-system is equivalent to the complete logical system (if such there be); better, given any normal-deductive-system there exists another which second proves more theorems (to put it roughly) than the first”.

8 „A complete symbolic logic is impossible”.

> Jeśli chodzi o ewentualne pretensje, które mógłbym wnosić [w kwestii pierwszeństwa — uwaga moja, R.M.], wydaje mi się, że najlepszą rzeczą, jaką mogę powiedzieć jest to, iż byłbym *udowodnił* twierdzenie Gödla w 1921, gdybym był Gödlem[9].

W liście do Gödla z 30 października 1938 roku napisał zaś (por. Davis, 1994, XVII):

> [...] nade wszystko zaś to nie pomysły, ale ich realizacja są oznaką wielkości[10].

Napisaliśmy wyżej, że Post zrezygnował z dalszych badań nad niezupełnością systemów logicznych. Nie jest to jednak do końca ścisłe. Otóż na początku lat czterdziestych Post napisał pracę zatytułowaną *Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions—account of an anticipation*. W 1941 wysłał ją do redakcji „American Journal of Mathematics". W liście do Hermanna Weyla dołączonym do maszynopisu wyjaśniał, dlaczego nie opublikował swoich wyników dwadzieścia lat wcześniej i chce to uczynić dopiero teraz, tzn. już po ogłoszeniu wyników Gödla i Churcha. Wśród powodów wymienia w liście kłopoty, jakie miał z publikacją swoich wcześniejszych prac, które nie znalazły uznania i nie zostały docenione przez matematyków, jak również swoje kłopoty ze zdrowiem, które opóźniały przygotowanie pełnych dowodów. Choć redakcja doceniała wagę badań Posta i znaczenie uzyskanych przez niego wyników, odrzuciła jednak zgłoszoną pracę. Weyl pisał do Posta w liście z 2 marca 1942 roku (por. Davis, 1994, XIX):

> [...] myślę, że dwadzieścia lat temu Pańska praca, częściowo z powodu swego naówczas rewolucyjnego charakteru, nie znalazła[by] właściwego uznania. Nie można jednak odwrócić biegu wskazówek zegara; w międzyczasie Gödel, Church i inni zrobili to, co zrobili, a „American Journal" [of Mathematics] nie jest miejscem, gdzie publikuje się prace historyczne [...]. (Osobiście może być dla Pana satysfakcją to, że większość wybitnych logików, przynajmniej w tym kraju, wie o Pańskiej antycypacji)[11].

Drukiem ukazała się jedynie mała część pracy Posta, dokładniej, część zawierająca jego twierdzenie o postaci normalnej (por. Post, 1944).

---

9 „As for any claims I might make perhaps the Best I can say is that I would have proved Gödel's Theorem in 1921—had I been Gödel".

10 „[...] after all it is not ideas but the execution of ideas that constitute a Mark of greatness".

11 „[...] I have little doubt that twenty years ago your work, partly because of its then revolutionary character, did not find its due recognition. However, we cannot turn the clock back; in the meantime Gödel, Church and others have done what they have done, and the American Journal is no place for historical accounts; [...]. (Personally, you may be comforted by the certainty that most of the leading logicians, at least in this country, know in a general way of your anticipation.)".

Pełna wersja pracy *Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions—account of an anticipation* została opublikowana pośmiertnie w roku 1965 w książce M. Davisa *The Undecidable* (por. Post, 1965, s. 375–441).

Rozważając kwestie związane z zagadnieniem rozstrzygalności, należy podkreślić wkład Posta w precyzowanie pojęcia efektywnej obliczalności. Uważał on, że brakiem definicji Herbranda-Gödla i Churcha-Kleene'ego jest to, że nie dają pełnej analizy pojęcia procesu algorytmicznego. W pracy „Finite combinatory processes" (1936) zaproponował definicję opartą na operacjach zaznaczania pustej kratki i wymazywania znaku z zaznaczonej kratki. Wyraźnie zauważyć można pewne podobieństwo tego podejścia do definicji podanej w tym samym czasie przez A. Turinga (por. Turing, 1936–1937). Podejścia te różnią się tym, że Turing sformułował swą definicję w terminach wyidealizowanego komputera, podczas gdy Post w terminach programu (czyli listy instrukcji napisanych w danym języku).

Z problemami funkcji rekurencyjnych i ogólnie teorią rekursji związane są najważniejsze prace Posta, w szczególności większość jego prac, które znalazły uznanie i zostały docenione przez świat logików. Wspomnieć tu trzeba nade wszystko o pracy „Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems" (1944). Okazała się ona najbardziej wpływową z jego prac i podstawową dla całej teorii rekursji. Istotnie, teoria rekursji została w niej po raz pierwszy przedstawiona jako autonomiczna dyscyplina matematyczna, jako samodzielny dział podstaw matematyki. W szczególności znajdujemy w tej pracy:

- twierdzenie nazywane dziś twierdzeniem Posta, głoszące, że zbiór X jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno X, jak i jego dopełnienie $-X$ są rekurencyjnie przeliczalne;
- twierdzenie głoszące, że (a) każdy nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny zawiera nieskończony podzbiór rekurencyjny oraz (b) istnieje zbiór rekurencyjnie przeliczalny, który nie jest rekurencyjny.

Głównym tematem rozważań Posta w omawianej pracy (1944) jest problem wzajemnej redukowalności zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych. Przypomnijmy, że mówimy, iż zbiór X jest redukowalny do zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja rekurencyjna f taka, że dla każdego x: $x \in X \leftrightarrow f(x) \in Y$. Jeśli funkcja f jest różnowartościowa, to mówimy o 1–1 redukowalności.

Post udowodnił, że istnieje rekurencyjnie przeliczalny zbiór K zupełny ze względu na redukowalność (1–1 redukowalność), tzn. taki, że każdy rekurencyjnie przeliczalny zbiór X jest redukowalny

(1–1 redukowalny) do zbioru *K*. Zatem *K* ma maksymalny stopień nierozstrzygalności ze względu na redukowalność (1–1 redukowalność). Post skonstruował także rekurencyjnie przeliczalny zbiór, który jest prosty, tzn. posiada tę własność, że nie istnieje żaden nieskończony rekurencyjnie przeliczalny podzbiór jego dopełnienia. Zbiór taki nie może posiadać maksymalnego stopnia nierozstrzygalności ze względu na 1–1 redukowalność. To doprowadziło Posta do sformułowania następującego problemu, zwanego w literaturze problemem Posta: czy istnieje rekurencyjnie przeliczalny, ale nie rekurencyjny zbiór o stopniu nierozstrzygalności niższym niż stopień zbioru zupełnego *K* względem danego rodzaju redukowalności?

Postowi nie udało się rozwiązać tego problemu. W pracy „Degrees of recursive unsolvability" (1948) udowodnił jednak, że istnieją zbiory o stopniu mniejszym niż stopień zbioru K, ale zbiory te nie są rekurencyjnie przeliczalne.

Problem postawiony przez Posta został rozwiązany dopiero w latach pięćdziesiątych niezależnie przez A.A. Muchnika (1956) i R. Friedberga (1957) za pomocą nowej metody, którą wprowadzili, a która okazała się bardzo ważna w teorii stopni nierozstrzygalności, a mianowicie metody priorytetu. Pokazali oni mianowicie, że istnieją dwa zbiory rekurencyjnie przeliczalne *A* i *B* takie, że *A* nie jest rekurencyjny w *B* i *B* nie jest rekurencyjny w *A*, czyli *A* i *B* są nieporównywalne w sensie redukowalności. Jedną z konsekwencji wyniku Muchnika-Friedberga jest to, iż stopnie nierozstrzygalności (a nawet stopnie zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych) nie są uporządkowane liniowo i że istnieją stopnie rekurencyjnie przeliczalne inne niż stopień zbiorów rekurencyjnych i stopień zbioru zupełnego (przykładami takich zbiorów są w szczególności skonstruowane przez Muchnika i Friedberga zbiory *A* i *B*).

Praca Posta *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems* (1944) wprowadziła pewne standardy i normy dotyczące sposobu prezentowania wyników w teorii rekursji. Polegały one na podawaniu raczej nieformalnych dowodów wraz z opisem intuicji. Wprawdzie Post widział potrzebę podawania dowodów formalnych, aczkolwiek pisał (por. Post, 1944, s. 284):

> […] prawdziwa matematyka rozwija się w sposób nieformalny. Istotnie, w każdym przypadku wpierw tworzy się „dowód" nieformalny, a gdy ten już jest, to przekształcenie go w dowód formalny okazuje się rutynową robotą[12].

12 „[…] the real mathematics involved must lie in the informal development. For in every instance the informal 'proof' was first obtained; and once gotten, transforming it into the formal proof turned out to be a routine chore".

Rozważana praca (1944) wywarła istotny wpływ na dalszy rozwój teorii rekursji. Zapoczątkowała ona intensywne badania nad zbiorami rekurencyjnie przeliczalnymi, w szczególności nad różnego rodzaju redukowalnościami. Tu należy też doszukiwać się źródeł ważnego pojęcia redukowalności w czasie wielomianowym czy badań związanych z problemem NP-zupełności.

Post kontynuował swoje badania nad stopniami nierozstrzygalności w pracy *Degrees of recursive unsolvability* (1948). W pracy tej wprowadził pojęcie stopnia nierozstrzygalności dowolnych zbiorów (niekoniecznie rekurencyjnie przeliczalnych) i dowiódł, że istnieje para stopni nieporównywalnych (oba stopnie były niższe niż stopień zupełnego zbioru rekurencyjnie przeliczalnego K). Zaanonsował także twierdzenie zwane dziś twierdzeniem Posta, które głosi, że zbiór X jest rekurencyjny w zbiorze $A \in \Sigma^0_{\mathrm{n}}(\Pi^0_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem klasy Δ^0_{n+1}.

Wspomnijmy jeszcze o pracy Posta napisanej wspólnie z S.C. Kleene'em „The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability" (por. Kleene-Post, 1954). Udowodnili oni tam m.in. twierdzenie mówiące, że uporządkowany zbiór stopni nierozstrzygalności zawiera podzbiór uporządkowany gęsto.

Post zajmował się nie tylko „klasyczną" teorią rekursji (badającą podzbiory zbioru liczb naturalnych), ale także nierozstrzygalnością algebraicznych systemów kombinatorycznych. Jest to o tyle ważne, że wyniki tego typu dawały „matematyczne" przykłady problemów nierozstrzygalnych. Nie będziemy tu wchodzić w skomplikowane szczegóły techniczne. Powiedzmy więc tylko, że w pracy *A variant of a recursively unsolvable problem* (1946) Post pokazał, iż problem odpowiedniości (korespondencji) nie jest rekurencyjnie rozstrzygalny — wynik ten odgrywa ważną rolę w teorii języków formalnych. Post zajął się także — za sugestią Churcha — problemem rozstrzygalności systemów Thue'ego, zwanym problemem słów dla monoidów lub semi-grup (problem ten sformułował w roku 1914 matematyk norweski Axel Thue). W pracy *Recursive unsolvability of a problem of Thue* (1947) podał przykład systemu Thuego, dla którego problem słów jest nierozstrzygalny.

Opisawszy ściśle logiczne prace Posta powiedzmy jeszcze słów kilka o jego poglądach metodologicznych i filozoficznych — one przecież w jakiś (być może niekoniecznie bezpośredni) sposób wpływały na jego podejście do zagadnień formalnych.

Zauważmy na początek, że Post — podobnie jak Gödel — podkreślał znaczenie faktu, iż pojęcie rekurencyjnej rozstrzygalności jest absolutne i ma charakter fundamentalny. Post próbował też wyjaśnić pojęcie dowodliwości, tzn. chciał znaleźć ścisłe pojęcie, które precyzowałoby intuicyjne pojęcie dowodliwości w arytmetyce w taki sposób, jak pojęcie rekurencyjności precyzuje pojęcie efektywnej obliczalności i rozstrzygalności. Żywił nadzieję, że umożliwi to znalezienie arytmetycznych zdań absolutnie nierozstrzygalnych. W okresie późniejszym dołączył do tego problem znalezienia absolutnego wyjaśnienia i eksplikacji ogólnego matematycznego pojęcia definiowalności (co więcej, uważał, że powinno to zostać dokonane nawet przed podaniem ścisłej eksplikacji pojęcia dowodliwości).

Post podkreślał, że (por. Post ,1965, s. 64):

> Uprawiam matematykę jako produkt umysłu ludzkiego a nie jako coś absolutnego[13].

Był przekonany, że myślenie matematyczne ma charakter twórczy. W (Post, 1965, s. 4) pisał:

> [...] myślenie matematyczne jest, i musi być, istotnie twórcze[14].

Uważał, że zakres ludzkiej wiedzy nie może być ograniczony i zamknięty. Nie może zostać też zredukowany do systemu formalnego. Dodawał (por. Post, 1965, s. 4):

> [...] kreatywność ludzkiej matematyki ma swój odpowiednik w postaci nieuniknionych ograniczeń — przykładem absolutnie nierozstrzygalne problemy (kombinatoryczne)[15].

Z drugiej strony był przekonany, że wyniki dotyczące nierozstrzygalności i niezupełności wskazują, że ludzka zdolność pojmowania i zdobywania wiedzy w odniesieniu do matematyki jest w istocie ograniczona mimo kreatywności myślenia matematycznego. W (Post, 1965, s. 56) pisał:

> Nierozwiązywalność problemu rozstrzygalności dla systemów normalnych i istotna niezupełność wszelkich logik symbolicznych są świadectwem ograniczeń matematycznych sił człowieka, nawet jeśli są one kreatywne[16].

Post twierdził, że istnieją zdania absolutnie nierozstrzygalne (tzn. nierozstrzygalne za pomocą żadnych metod i środków) i że nie istnieje żaden zupełny system logiki[17]. Jedną z konsekwencji tego jest wedle jego opinii fakt, że (por. Post, 1965, s. 55):

---

13 „I study Mathematics as a product of the human mind and not as absolute".

14 „[...] mathematical thinking is, and must be, essentially creative".

15 „[...] creativeness of human mathematics has a counterpart inescapable limitations thereof—witnesss the absolutely unsolvable (combinatory) problems".

16 „The unsolvability of the finiteness problem for all normal systems, and the essential incompleteness of all symbolic logics, are evidences of limitations in man's mathematical powers, creative though these be".

17 Por. Post (1965, s. 54), gdzie napisał: „Zupełna logika symboliczna jest niemożliwa" („A complete symbolic logic is impossible").

> Logika musi być nieformalna nie tylko w pewnych częściach jej opisu (jak i w swoim działaniu), ale w samym swoim działaniu. Więcej nawet, możemy napisać
>
> *Proces logiczny jest istotnie twórczy*[18].

W konsekwencji umysł ludzki nie może być nigdy zastąpiony przez maszynę. W (Post, 1965, s. 55) napisał:

> Widzimy, że *maszyna* nigdy nie da zupełnej logiki; istotnie, dla każdej danej maszyny *my* możemy udowodnić twierdzenie, którego ona nie udowodni[19].

Opisaliśmy powyżej najważniejsze prace logiczne Posta. Zapytajmy teraz o ich znaczenie dla rozwoju logiki i podstaw matematyki. Odpowiedzieć można krótko: prace te w sposób istotny przyczyniły się do rozwoju tych dyscyplin. To prace Posta (wraz z pracami Jana Łukasiewicza) zapoczątkowały badania nad logikami wielowartościowymi i nad związanymi z nimi algebrami, zwanymi dziś algebrami Posta. Jego badania nad rachunkiem zdań, których wyniki zawarte zostały w jego dysertacji doktorskiej, były pierwszymi badaniami metamatematycznymi nad systemem logiki. Najważniejsze były chyba jego prace i uzyskane wyniki z zakresu teorii rekursji. Jak wskazywaliśmy już wyżej, przyczyniły się one do tego, że ten dział podstaw matematyki stał się autonomiczną dziedziną badań. Post zapoczątkował intensywne badania nad stopniami nierozstrzygalności, w szczególności nad stopniami rekurencyjnie przeliczalnymi, badania nad (nie)rozstrzygalnością różnych systemów, w tym systemów kombinatorycznych w algebrze i nad różnego rodzaju rekurencyjną redukowalnością. Badania Posta wywarły też wpływ na informatykę (aczkolwiek sam Post nie wykazywał żadnego zainteresowania komputerami). Okazały się także znaczące dla teorii języków formalnych.

Warto też zauważyć, że badania Posta w jakimś sensie wyprzedzały epokę, miały charakter prekursorski (wspomnijmy tylko jego antycypację wyników Gödla i Churcha opisaną wyżej). Miało to dla Posta także negatywne konsekwencje w postaci lęku przed byciem niezrozumianym przez innych logików. Wpływało też na opóźnianie publikacji uzyskanych wyników. Do tego kłopoty ze zdrowiem, w szczególności choroba, na którą cierpiał przez całe niemal życie, utrudniały publikowanie wyników we właściwym czasie. Wiele wyników Posta pozostało w formie niekompletnej. Próbował on cały czas ulepszać osiągnięte

18 „[...] logic must not only in some parts of its description (as in the operations), but in its very operation be informal. Better still, we may write / *The Logical Process is Essentially Creative*".

19 „We see that a *machine* would never give a complete logic; for once the machine is made we could prove a theorem it does not prove".

rezultaty i szukał ich najogólniejszych postaci — to także oczywiście powodowało opóźnienia. Mimo wszystkich tych okoliczności uznać należy, że Post wniósł istotny wkład w rozwój logiki matematycznej i podstaw matematyki.

Bibliografia

Church, A. (1936a). An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics* 58, s. 345–363.

Church, A. (1936b). A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic* 1, 40–41. Correction: ibid., s. 101–102.

Davis, M. (Ed.) (1965). *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*. Hewlett, New York: Raven Press.

Davis, M. (Ed.) (1994). *Solvability, Provability, Definability: The Collected Works of Emil L. Post*. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser.

Friedberg, R. (1957). Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability (solution of Post's problem). *Proceedings of the National Academy of Sciences* (*USA*) 43, s. 236–238.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme. I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, s. 173–198.

Heijenoort van, J. (Ed.) (1967). *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge: Harvard University Press.

Jevons, W.S. (1864). *Pure Logic, or the Logic of Quality apart from Quantity with Remarks on Boole's System and the Relation of Logic and Mathematics*. London-New York: E. Stanford.

Kleene, S.C., Post, E.L. (1954). The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability. *Annals of Mathematics* 59, s. 379–407. Przedruk w: Davis (1994), s. 514–542.

Lewis, C.I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California Press.

Minsky, M. (1961). Recursive unsolvability of Post's problem of tag and other topics in the theory of Turing machines. *Annals of Mathematics* 74, s. 437–455.

Muchnik, A.A. (1956). Nerazreshimost' problemy svodimosti algoritmov. *Doklady Akademii Nauk SSSR* 108, s. 194–197.

Pelletier, F.J., Martin, N.M. (1990). Post's functional completeness theorem. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 31, s. 462–475.

Post, E.L. (1921). Introduction to a general theory of elementary propositions, *American Journal of Mathematics* 43, s. 163–185. Przedruk w: Heijenoort (1967), s. 264–283; także w: Davis (1994), s. 21–43.

Post, E.L. (1936). Finite combinatory processes. Formulation I, *Journal of Symbolic Logic* 1, s. 103–105. Przedruk w: Davis (1994), s. 103–105.

Post, E.L. (1941). *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*. Princeton: Princeton University Press. Przedruk w: Davis (1994), s. 249–374.

Post, E.L. (1943). Formal reductions of the general combinatorial decision problem, *American Journal of Mathematics* 65, s. 197–215. Przedruk w: Davis (1994), s. 442–460.

Post, E.L. (1944). Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problem, *Bulletin of the American Mathematical Society* 50, s. 284–316. Przedruk w: Davis (1994), s. 461–494.

Post, E.L. (1946). A variant of a recursively unsolvable problem, *Bulletin of the American Mathematical Society* 52, s. 264–268. Przedruk w: Davis (1994), s. 495–500.

Post, E.L. (1947). Recursive unsolvability of a problem of Thue, *Journal of Symbolic Logic* 21, 1–11. Przedruk w: Davis (1994), s. 503–513.

Post, E.L. (1948). Degrees of recursive unsolvability (Preliminary report), *Bulletin of the American Mathematical Society* 54, s. 641–642. Przedruk w: Davis (1994), s. 549–550.

Post, E.L. (1965). Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions —account of an anticipation. Po raz pierwszy opublikowana w: Davis (1965), s. 340–433.

Turing, A. (1936–1937). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 42, s. 230–265. Correction: *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 43, s. 544–546.

Whitehead, A.N., Russell, B. (1910–1913). *Principia Mathematica*, vol. 1 — 1910, vol. 2 — 1912, vol. 3 — 1913. Cambridge: Cambridge University Press.

On Emil L. Post's logical works

Abstract: In the paper main ideas of logical works by Emil L. Post (1897–1954) will be presented and their meaning and impact on the development of mathematical logic and the foundations of mathematics will be considered. In particular the following problems and items will be discussed: Post's contribution to investigations on the propositional calculus and the meaning of his works concerning canonical systems, incompleteness and undecidability. It will be shown how his works contributed to the establishing of the recursion theory as an independent research domain. His philosophical and methodological views will be also presented and discussed.

Mieczysław Omyła

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

| 0000-0003-4732-7601

Uwagi o spójniku porządku*

1. Wprowadzenie

Z podręczników logiki matematycznej znane jest pojęcie relacji porządkującej zbiór dowolnych przedmiotów. Przyjmuje się, że relacja, która w danym zbiorze jest równocześnie zwrotna, antysymetryczna i przechodnia porządkuje w pewien sposób ten zbiór.

Językowym odpowiednikiem relacji porządkującej jest predykat porządku, oznaczany często symbolami: „$\leq$”, „$\subset$”, „$\subseteq$”.

Predykat porządku łączy dwie nazwy lub ogólniej dwa wyrażenia o charakterze nazwowym w jedną formułę zdaniową. Wyrażenia: „$x \leq y$”, „$x \subset y$” zwykle czytamy:
x jest nie większe od y bądź *x jest mniejsze lub równe y* albo *przedmiot x poprzedza przedmiot y*, jak również *przedmiot x jest zawarty w przedmiocie y*.

Sądzić można, że jeżeli zmienne nazwowe: x, y, z, ... przyjmują wartości z dowolnej dziedziny przedmiotów, to nie ma potrzeby, aby w języku występowały inne funktory porządku niż predykaty oznacza-

* Artykuł ten nawiązuje do rozmów i dyskusji, jakie prowadziliśmy z prof. J. Zygmuntem w trakcie przygotowywania przez Niego do publikacji pozycji (Suszko, 2022).

jące różne relacje porządkujące, w szczególności nie ma potrzeby, aby w języku występował spójnik porządku.

Faktem jest jednak, że w językach badanych w logice zwykle występują spójniki porządku. Intuicyjnie spójnik porządku jest to funktor, który łączy dwa dowolne zdania: α, β w jedno zdanie prawdziwe wtedy i tylko, gdy relacja odpowiadająca temu spójnikowi, zachodząca między korelatami semantycznymi zdań α, β jest relacją porządkującą.

Uprzedzając dalsze rozważania, stwierdźmy, że w najprostszym przypadku spójnikiem porządku jest funktor klasycznej implikacji, gdyż implikacji odpowiada relacja porządkująca wartości logiczne zdań.

Rozważania na temat spójnika porządku można prowadzić na czysto logicznym (językowym) gruncie, nie wychodząc poza język i określoną w nim operację konsekwencji. Jednak w obecnym opracowaniu dotyczącym spójnika porządku odwołamy się do pewnych intuicji filozoficznych zarówno ontologicznych, jak i semantycznych.

2. Filozoficzne podłoże spójnika porządku

Gottlob Frege uważał, że zdania są nazwami szczególnego rodzaju przedmiotów, którymi są wartości logiczne, czyli Prawda i Fałsz. Symbolicznie oznaczamy je odpowiednio: prawdę przez „V" i fałsz literą „F". W teorii modeli języków klasycznego rachunku predykatów pierwszego rzędu wartości logiczne są jedynymi korelatami semantycznymi zdań. Dlatego teoria modeli dla języków predykatów pierwszego rzędu stanowi ukoronowanie fregowskiego paradygmatu.

Roman Suszko w tzw. niefregowskim okresie swojej twórczości, który rozpoczął się około 1966 roku, przyjmował za Ludwigiem Wittgensteinem, że zdaniu odpowiada korelat semantyczny różny od jego wartości logicznej, a jest nim opisywana przez te zdania *sytuacja*. Wittgenstein w *Traktacie* między innymi napisał:

> 3.144 Sytuacje można opisywać, nie *nazywać*.
> 4.03 [...] Zdanie powiadamia nas o pewnej sytuacji, a zatem jego związek z nią musi być *istotny*.
> 4.06 Zdanie może być prawdą lub fałszem tylko dzięki temu, że jest obrazem rzeczywistości.

Suszko uważał, że analogicznie jak są dwie podstawowe kategorie syntaktyczne: nazwy i zdania, tak istnieją również dwie podstawowe kategorie ontologiczne: przedmioty i sytuacje. Przedmioty oznaczamy nazwami, a sytuacje opisujemy zdaniami. W zasadzie przedmioty oznaczamy arbitralnie za pomocą procedur metajęzykowych, na przykład przez wskazanie dla danego przedmiotu jego nazwy, a zdaniu przyporządkowana jest sytuacja przez językowy opis pewnego fragmentu rzeczywistości.

Według wielu badaczy bezpośrednio dane nam są sytuacje, a dopiero wtórnie wyabstrahowujemy z nich przedmioty, własności i relacje. Dlatego nie możemy budować ontologii sytuacji na bazie przedmiotów.

W celu formalnego ujęcia pewnych idei ontologicznych zawartych w *Traktacie* L. Wittgensteina Suszko wprowadził do literatury logicznej tzw. W-języki (W- od Wittgenstein). Słownik i składnia W-języków jest tak dobrana, żeby można było w nich formułować twierdzenia dotyczące zarówno przedmiotów jak i sytuacji. W alfabecie W-języków występują między innymi dwa rodzaje zmiennych: zmienne nazwowe i zmienne zdaniowe, predykaty, klasyczne spójniki: $\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\rightarrow$ (implikacja), $\leftrightarrow$ (równoważność), kwantyfikatory: $\forall$, $\exists$ wiążące oba rodzaje zmiennych, spójnik i predykat identyczności, które oznaczamy tym samym symbolem „$\equiv$".

Zamierzona interpretacja W-języków jest taka, że zmienne nazwowe przyjmują wartości w zbiorze przedmiotów, a zmienne zdaniowe przyjmują wartości w uniwersum sytuacji.

W W-językach określona jest operacja konsekwencji Cn, zwana logiką niefregowską. Logika ta zawiera w sobie klasyczną logikę oraz powiązaną z nią aksjomatyczną charakterystykę spójnika identyczności. Spójnik identyczności scharakteryzowany jest w ten sposób, że dla dowolnych zdań: α, β równość $\alpha \equiv \beta$ jest prawdziwa, gdy zdania α, β mają ten sam korelat semantyczny.

Języki rodzaju W wraz z określoną w nich logiką niefregowską w pierwszej kolejności służą do formalizacji ontologii zawartej w *Traktacie* L. Wittgensteina. Dla dowolnego ustalonego W-języka J przez $Cn(\emptyset)$ oznaczamy zbiór jego twierdzeń logicznych, a przez TFT (*Truth Functional Tautology*) zbiór klasycznych tautologii. Zachodzi TFT $Cn \subsetneq (\emptyset)$.

Żaden spójnik porządku, z wyjątkiem spójnika identyczności, nie jest terminem pierwotnym logiki niefregowskiej, ani nie jest terminem zdefiniowanym na jej gruncie.

W pracach (Suszko, 1968a, 1968b) jako twierdzenia ontologiczne przyjmuje się między innymi konsekwencje założenia, że zdania logicznie równoważne przedstawiają tę samą sytuację. Jest to zgodne z następującą tezą *Traktatu*:

> 5.141 Jeżeli *p* wynika z *q*, a *q* wynika z *p*, to są jednym i tym samym zdaniem.

Teorię:

$$\mathrm{Cn}\,(\{\alpha \equiv \beta\colon (\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathrm{Cn}(\emptyset)\})$$

będącą zbiorem konsekwencji zbioru równości takich, że równoważność jest twierdzeniem logiki niefregowskiej Suszko oznaczał skrótem WTQ (W — od Wittgenstein, T — topologia, Q — kwantyfikatory).

Zachodzi więc

$$\mathrm{WTQ} = \mathrm{Cn}\,(\{\alpha \equiv \beta\colon (\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathrm{Cn}(\emptyset)\}).$$

Teoria WTQ zawiera między innymi wszystkie równości boole'owskie zapisane za pomocą zmiennych zdaniowych. Przykładowo takie jak:

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p), (\mathrm{p} \wedge q) \equiv (q \wedge p).$$

Na gruncie WTQ definiowalny jest spójnik „≤" za pomocą następującej definicji równościowej:

$$(p \leq q) \equiv [(p \rightarrow q) \equiv 1],$$

gdzie 1 jest stałą zdaniową określoną wzorem $1 \equiv (p \vee \neg p)$, $0 \equiv \neg 1$.

Twierdzeniami WTQ są między innymi następujące formuły:

(1) $p \leq p$,

(2) $(p \leq q) \wedge (q \leq r) \rightarrow (p \leq r)$,

(3) $(p \leq q) \wedge (q \leq p) \rightarrow (p \equiv q)$.

Funktor „≤" łączy dwie formuły zdaniowe w jedną formułę zdaniową, jest więc spójnikiem, a ze względu na twierdzenia (1), (2), (3) określa pewien porządek w uniwersum, w którym wartości przyjmują zmienne zdaniowe. Jest więc spójnikiem porządku. Powstaje problem, jak najtrafniej odczytywać wyznaczoną niejako przez logikę relację porządku między sytuacjami.

Suszko w pracach (1968a, 1968b) wyrażenie „$p \leq q$" odczytuje: „sytuacja *p* zawiera sytuację *q*" lub „sytuacja *q* zachodzi w sytuacji *p*". Ten sposób czytania znaku „≤" jest trochę nieintuicyjny dla czytelników literatury filozoficznej. Dlatego w niektórych pracach zakresu logiki filozoficznej, na przykład w (Omyła, 1986) określa się relację będącą konwersem relacji ≤ w następujący sposób:

$$(p \preccurlyeq q) \equiv [(q \rightarrow p) \equiv 1].$$

Wyrażenie: „$p \preccurlyeq q$" czytamy:

sytuacja *p* jest zawarta w sytuacji *q* lub sytuacja *p* zachodzi w sytuacji *q*, bądź, za Wolniewiczem, *sytuacja p tkwi w sytuacji q* lub *sytuacja q obejmuje sytuację p*.

Przykładowo, sytuacja polegająca na tym, że *zdałem egzamin z logiki* jest zawarta w sytuacji, że *zdałem egzamin z logiki i zdałem egzamin z filozofii*, analogicznie sytuacja polegająca na tym, że *Sokrates jest śmiertelny*, jest zawarta w sytuacji, że *każdy człowiek jest śmiertelny*.

Za pomocą relacji porządkującej wyznaczonej przez funkcję zdaniową „$p \preccurlyeq q$" określa się kluczowe dla *Traktatu* pojęcie *ogółu faktów* oraz pojęcia z nim pokrewne, takie jak pojęcie *możliwego świata* i *realnego świata*.

Traktat logiczno-filozoficzny rozpoczyna się tezami:

1 Świat jest wszystkim, co jest faktem.
1.1 Świat jest ogółem faktów, nie rzeczy.
1.11 Świat jest wyznaczony przez fakty oraz przez to, że są to wszystkie fakty.

Ogół faktów interpretujemy jako kres górny ze względu na porządekzbioru wszystkich faktów i reprezentujemy go przez jednoargumentowy spójnik SF (suma faktów) i określony w następujący sposób:

(4) $\mathrm{SF}p \equiv \{\forall q[q \rightarrow (q \preccurlyeq p)] \wedge \forall \mathrm{r}\, [\forall q(q \rightarrow (q \preccurlyeq \mathrm{r})) \rightarrow (p \preccurlyeq \mathrm{r})\}$.

Wzór (4) stwierdza, że suma faktów SFp jest najmniejszą sytuacją w sensie porządku $\preccurlyeq$ która zawiera wszystkie fakty. Ponadto, za pomocą relacji $\preccurlyeq$ definiuje się inne terminy ontologiczne, takie jak pojęcia możliwego świata PW (*possible world*) i pojęcie realnego świata RW (*real world*). Przyjmuje się bowiem definicje:

(5) $\mathrm{PW}p = \{\neg(p \equiv 0) \wedge \forall q[(q \preccurlyeq \mathrm{p}) \vee (\neg q \preccurlyeq \mathrm{p})]\}$,

(6) $\mathrm{RW}p \equiv (p \wedge \mathrm{PW}p)$.

Według wzoru (5) możliwy świat jest to sytuacja możliwa (różna od sytuacji sprzecznej) i dla każdej sytuacji q (albo q, albo nie-q) zachodzi w p. Z kolei realny świat RW jest to możliwy świat, który jest faktem. Pojęcia te były obecne już w pracach (Suszko, 1968a, 1968b), tylko były określane za pomocą spójnika porządku „≤". Warto zwrócić uwagę, że pojęcia: możliwego świata, realnego świata oraz sumy faktów, na gruncie teorii WTQ mają charakter wewnątrzjęzykowy, ontologiczny, w przeciwieństwie do logiki modalnej, gdzie terminy: *możliwy świat*, *świat wyróżniony*, mają charakter metajęzykowy, występują bowiem w semantyce języków modalnych.

3. Spójnik porządku w teorii definicji logiki niefregowskiej

Znaczenie spójnika porządku w teorii definicji przedstawimy na przykładzie standardowych definicji symboli funkcyjnych. Dla omówienia roli spójnika porządku w teorii definicji oraz w teorii przekładalności języków przyjmujemy oznaczenia: literą J oznaczamy dowolny język rodzaju W, z kolei S jest zbiorem wszystkich formuł zdaniowych języka J, a Cn jest niefregowską operacją konsekwencji w tym języku. Ponadto niech T będzie dowolną Cn-teorią w J, której twierdzeniami są zdania:

(7) $\forall x \exists y P(x,y)$,

(8) $\forall x \forall y \forall z[P(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow (y = z)]$,

gdzie P(x,y) jest pewną formułą zdaniową ze zbioru S.

Język J oraz teorię T rozszerzamy przez przyjęcie następującej definicji równoważnościowej:

(d) $\forall x \forall y[y = f(x) \leftrightarrow P(x,y)]$,

gdzie „f" jest symbolem funkcyjnym niewystępującym w alfabecie języka J. Tak otrzymany język oznaczamy symbolem J^+, a zbiór jego formuł zdaniowych znakiem S^+. W języku J^+ określamy teorię T^+ w następujący sposób:

$$T^+ = Cn\ (T \cup \{(d)\}).$$

Definicja (d) w sposób jednoznaczny określa funkcję f. Od definicji zwykle wymaga się, aby pozwalała przełożyć każdą formułę zdaniową zawierającą termin definiowany na równoważną z nią formułę zdaniową niezawierającą tego terminu. Przyjmujemy następującą definicję przekładalności równoważnościowej:

Metadefinicja 1.

Język J^+ jest przekładalny (równoważnościowo) na język J w teorii T^+, gdy dla każdej formuły zdaniowej $\alpha \in S^+$ istnieje formuła $\beta \in S$ taka, że $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in T^+$.

Przedstawimy szkic dowodu indukcyjnego przekładalności języka J^+ zawierającego symbol funkcyjny „f" na język J w teorii T^+.

Aby pokazać, że dowolna formuła atomowa A[f(x)] języka J^+ zawierająca symbol funkcyjny „f" jest przekładalna na język J, korzystamy z tautologii:

$$A[f\,(x)] \leftrightarrow \exists y[y =f(x) \wedge A(y)].$$

Z definicji (d) otrzymujemy

(9) $A[f(x)] \leftrightarrow \exists y[P(x,y) \wedge A(y)]$.

(I) Jeżeli formuły $\alpha, \beta \in S^+$ są przekładalne w teorii T^+, to również ich połączenia spójnikami klasycznymi są przekładalne na język J.

(II) Z kolei formuły typu $Qx\alpha[f(x)]$, gdzie $Q = \forall, \exists$ przekładają się na podstawie schematu twierdzeń logicznych:

$$Qx\alpha[f(x)] \leftrightarrow Qx\ \exists y[y=f(x) \wedge \alpha(y)].$$

Z definicji (d) otrzymujemy więc

$$Qx\alpha[f(x)] \leftrightarrow Qx\exists y[P(x,y) \wedge \alpha(y)].$$

Powstaje problem z przekładalnością formuł typu:

(10) $\forall x\alpha[f(x)] \equiv \exists x\beta[f(x)]$.

Aby z formuły (10) wyeliminować symbol funkcyjny „ f”, nie wystarczy znaleźć przekłady równoważnościowe obu jej stron. Dla przekładu formuły (10) korzystamy z tego, że w rozważanym języku występują zmienne zdaniowe. Twierdzeniem logicznym jest formuła:

(11) $\{\forall x\alpha[f(x)] \equiv \exists x\beta[f(x)]\} \leftrightarrow \exists p\exists q\{(p \equiv \forall x\alpha[f(x)]) \wedge (q \equiv \exists x\beta[f(x)]) \wedge (p \equiv q)\}$.

Z formuły (11) wnioskujemy, że problem przekładalności — w przypadku definicji symboli funkcyjnych — sprowadza się do przekładalności formuł typu:

(12) $p \equiv Qx\alpha[f(x)]$.

Przekładalność formuł typu (12) związana jest ściśle z zagadnieniem, w jaki sposób korelat semantyczny zdań typu $\forall x\alpha(x)$, $\exists x\alpha(x)$ zależy od korelatów semantycznych zdań typu $\alpha[x/t]$, gdzie t jest dowolnym termem rozważanego języka.

W pracy (Omyła, 1976) pokazano, że zachodzi następujące twierdzenie:

Metatwierdzenie 1:

Jeżeli teoria T^+ jest rozszerzeniem teorii T przez dodanie do jej twierdzeń definicji

(d) $\forall x\forall y[y = f(x) \leftrightarrow P(x,y)$

i w języku J^+ występuje lub jest definiowalny spójnik porządku „≤”, czyli taki, że twierdzeniami teorii T^+ formuły:

(1) $p \leq p$,
(2) $(p \leq q) \wedge (q \leq r) \rightarrow (p \leq r)$,
(3) $(p \leq q) \wedge (q \leq p) \rightarrow (p \equiv q)$,

a dodatkowo twierdzeniami teorii T^+ są formuły kształtu:

(13) $\forall x\alpha(x) \leq \alpha[x/t]$,
(14) $\forall x(q \leq \alpha(x)) \rightarrow (q \leq \forall x\alpha(x))$,
(15) $\alpha(x) \leq \exists x\alpha(x)$,
(16) $\forall x(\alpha(x) \leq q) \rightarrow (\exists x\alpha(x) \leq q)$,

to język J^+ jest przekładalny równoważnościowo na język J. Warunki dotyczące obu kwantyfikatorów przyjmowane są oddzielnie, dlatego że w logice niefregowskiej kwantyfikatory nie są wzajemnie równościowo definiowalne.

Metatwierdzenie 1 wskazuje na rolę spójnika porządku w teorii definicji.

Problematyce definicji i przekładalności w logice niefregowskiej poświęcone są prace (Omyła, Suszko, 1972a, b) oraz (Omyła, 1976).

4. Porządki boole'owskie w SCI

W okresie niefregowskim, Suszko rozważał również otwarte W-języki. Najwięcej jednak uwagi i energii poświęcił językowi otwartemu bez formuł nazwowych, czyli językowi rachunku zdań ze spójnikiem identyczności, tzw. SCI (*Sentential Calculus with Identity*). W języku SCI występują jedynie: zmienne zdaniowe, spójniki klasyczne i spójnik identyczności. Według Suszki język ten, przy założeniu, że zmienne zdaniowe przyjmują wartości w uniwersum sytuacji, również realizuje pewne idee ontologiczne Wittgensteina.

Weźmy pod uwagę zbiór formuł WB określony w następujący sposób:

$$\mathrm{WB}=\mathrm{Cn}(\{\alpha \equiv \beta\colon (\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathrm{TFT}\}).$$

W literaturze logicznej rozważane były również tzw. WB-teorie (W — od Wittgenstein, B —od Boole'a).

Metadefinicja 2.

Zbiór formuł zdaniowych T języka J jest WB-teorią, gdy T jest teorią i $\mathrm{WB} \subseteq \mathrm{T}$.

Zbiór formuł WB jest najmniejszą WB-teorią.

Twierdzeniami WB-teorii są między innymi następujące równoważności:

$$((p \vee q) \equiv q) \leftrightarrow (p \wedge q) \equiv p)$$
$$((p \wedge q) \equiv p) \leftrightarrow ((p \to \neg q) \equiv 0)$$
$$((p \wedge \neg q) \equiv 0) \leftrightarrow (p \to q) \equiv 1)$$
$$((p \to q) \equiv 1) \leftrightarrow (p \vee q) \equiv q)$$

W pracy (Wawrzyńczak, 1973) zwraca się uwagę, że formuły:

$$(p \vee q) \equiv q,\ (p \wedge q) \equiv p,\ (p \wedge \neg q) \equiv 0,\ (p \to q) \equiv 1$$

określają cztery równoważne, ale nieidentyczne porządki boole'owskie, i są nimi:

$$(p \leq_1 q) \equiv [(p \to q\ ) \equiv 1]$$
$$(p \leq_2 q) \equiv [(p \vee q) \equiv q$$
$$(p \leq_3 q) \equiv [(p \wedge q) \equiv p]$$

$$(p \leq_4 q) \equiv (p \wedge \neg q) \equiv 0.$$

W cytowanej pracy stwierdza się, że dopiero przyjęcie obok WB dodatkowego założenia, że

$$(p \equiv q) \equiv [(p \leftrightarrow q\,) \equiv 1]$$

czyni te porządki identycznymi. Zachodzą bowiem wtedy równości:

$$((p \vee q) \equiv q) \equiv ((p \wedge q) \equiv p)$$
$$((p \wedge q) \equiv p) \equiv ((p \wedge \neg q) \equiv 0)$$
$$((p \wedge \neg q) \equiv 0) \equiv ((p \rightarrow q) \equiv 1)$$
$$((p \rightarrow q) \equiv 1) \equiv (p \vee q) \equiv q).$$

5. Spójnik porządku w logice trójwartościowej Łukasiewicza

W logice zdaniowej rozważa się również nieboole'owskie spójniki porządku. Przykładowo w pracy (Suszko, 1975) dowodzi, że Ł-implikacja „⇒" jest spójnikiem porządku. Przedstawimy szkic rozumowania Suszki.

Niech Fm będzie zbiorem formuł zdaniowych zbudowanych ze zmiennych zdaniowych za pomocą spójników trójwartościowej logiki Łukasiewicza $Ł_3$: „⇒", „⇔"

Ponadto niech {0,½,1} będzie zbiorem wartości algebraicznych (ontologicznych) logiki Łukasiewicza oraz niech h będzie dowolnym homomorfizmem semantycznym ze zbioru formuł Fm logiki $Ł_3$ w trójwartościową algebrę Łukasiewicza, czyli

h:Fm → {0, ½, 1}. Z homomorfizmem tym skojarzona jest waluacja logiczna $v_h(\alpha)$ określona dla dowolnej formuły zdaniowej α w następujący sposób:

$$v_h(\alpha) = V, \text{ gdy } h(\alpha) = 1 \text{ oraz}$$
$$v_h(\alpha) = F, \text{ gdy } h(\alpha) = 0 \text{ lub } ½.$$

Z określenia działań w algebrze Łukasiewicza wynika, że

$$v_h(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 1, \text{ gdy } h(\alpha) = h(\beta).$$

Funktor „⇔" jest więc spójnikiem identyczności. Z kolei funktor „⇒" jest spójnikiem porządku, dlatego, że twierdzeniami $Ł_3$ są formuły:

(I) $p \Rightarrow \mathrm{p}$,

(II) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \mathrm{r}) \Rightarrow (p \Rightarrow \mathrm{r})$,

(III) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \mathrm{p}) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$.

Semantycznie wyraża się to faktem, że dla dowolnych formuł α, β zachodzi:

$$v_h(\alpha \Rightarrow \beta)= V, \text{ gdy } h(\alpha) \leq h(\beta)$$

(w tym miejscu znak „≤” jest zwykłą, arytmetyczną nierównością w zbiorze liczb {0, ½, 1}).

6. Spójnik porządku jako termin logiczny

Dotąd rozważaliśmy spójnik porządku w językach, w których występują spójniki: koniunkcji, implikacji i identyczności. Funktory te odgrywały ważną rolę w określaniu spójnika porządku. W ostatnim okresie swoich badań nad logiką niefregowską Suszko określał spójnik porządku całkiem ogólnie, tzn. niezależnie od tego, jakie spójniki w alfabecie danego języka występują. Ponadto, definiował spójnik porządku jako stałą logiczną, czyli jako termin określony przez operację konsekwencji C obowiązującą w języku. Przyjmował bowiem definicję:

Metadefinicja 3. (Suszko, 2022)

Funktor dwuczłonowy § języka L jest spójnikiem porządku w rachunku (L, C) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych formuł: α, β, γ języka L spełnione są warunki:

(a) $\alpha \mathbin{\S} \alpha \in C(\emptyset)$

i następujące reguły:

(r_1) $\alpha \mathbin{\S} \beta, \beta \mathbin{\S} \gamma \vdash \alpha \mathbin{\S} \gamma$,

(r_2) $\alpha \mathbin{\S} \beta, (\beta \mathbin{\S} \alpha) \vdash \varphi(\alpha) \mathbin{\S} \varphi(\beta)$, dla dowolnego kontekstu zdaniowego φ,

(r_3) $\alpha \mathbin{\S} \beta, (\beta \mathbin{\S} \alpha), \alpha \vdash \beta$

są regułami konsekwencji C.

Aksjomat (a) gwarantuje zwrotność relacji odpowiadającej spójnikowi §, a reguła (r_1) zapewnia przechodniość tej relacji.

Z kolei reguła (r_2), zwana również regułą zastępowania, gwarantuje, że jeżeli $\alpha \mathbin{\S} \beta$ i $(\beta \mathbin{\S} \alpha)$ są twierdzeniami w dowolnej teorii w tej logice, to zdania α, β są wzajemnie zastępowalne we wszelkich kontekstach zdaniowych. Zdania te mają więc ten sam korelat semantyczny. Jest tak, zgodnie z Zasadą Leibniza, głoszącą, że wyrażenia, które są wzajemnie zastępowalne bez zmiany wartości logicznej, o ile posiadają korelaty semantyczne, to mają jeden wspólny korelat semantyczny. Reguła (r_2) zapewnia, że relacja odpowiadająca spójnikowi § jest antysymetryczna. Z kolei reguła (r_3) w pracy (Czelakowski, 2023) nazywana jest słabym odrywaniem.

Z definicji logiki ze spójnikiem porządku wynika, że jeżeli w rachunku (L, C) występują spójniki: implikacji „→” oraz identyczności „≡”, to spójnik „≤” jest spójnikiem porządku w tym rachunku logicznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych formuł α, β, g, ψ twierdzeniami logicznymi są formuły reprezentowane przez następujące schematy:

(S1) $\alpha \leq \alpha$,

(S2) $(\alpha \leq \beta) \rightarrow [(\beta \leq \gamma) \rightarrow (\alpha \leq \gamma)]$,

(S3) $(\alpha \leq \beta) \rightarrow [(\beta \leq \alpha) \rightarrow (\alpha \equiv \beta)]$,

(S4) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \leq \beta)$,

(S5) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow [(\gamma \equiv \psi) \rightarrow (\alpha \leq \gamma) \equiv (\beta \leq \psi)]$.

W klasycznym rachunku zdań spójnikami porządku są: „→" (implikacja) i „↔" (równoważność). W trójwartościowej logice Łukasiewicza $Ł_3$ spójnikami porządku są „(Ł-implikacja) i „(Ł-równoważność), w logice niefregowskiej, o ile nie przyjmuje się żadnych dodatkowych założeń, jedynym spójnikiem porządku jest spójnik identyczności „≡". Dla porównania spójnika porządku ze spójnikiem implikacji weźmiemy pod uwagę aksjomatyczne ujęcie implikacyjnego fragmentu SCI, czyli ograniczymy się do języka, którego jedynymi spójnikami są: „→" (implikacja) i identyczność „ ≡". Twierdzeniami implikacyjnego fragmentu SCI są wszystkie formuły reprezentowane przez następujące schematy aksjomatów logicznych:

(A1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$,

(A2) $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$,

(A3) $\alpha \equiv \alpha$,

(A4) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$,

(A5) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow [(\gamma \equiv \psi) \rightarrow (\alpha \equiv \gamma) \equiv (\beta \equiv \psi)]$,

(A6) $(\alpha \equiv \beta) \rightarrow [(\gamma \equiv \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \equiv (\beta \rightarrow \psi)]$

oraz formuły wyprowadzalne z tych aksjomatów w skończonej ilości kroków przez zastosowanie reguły odrywania:

(r_o) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$.

Ze schematów aksjomatów (A1), (A2) wynika między innymi, że teorie z implikacją są domknięte na regułę poprzedzania:

(r_p) $\alpha \vdash (\beta \rightarrow \alpha)$.

Aksjomat (A4) nosi nazwę specjalnego aksjomatu dla identyczności. Łączy on nieprawdziwościowy spójnik identyczności ze spójnikiem klasycznej implikacji.

Podsumowując, stwierdzamy, że wspólnym rdzeniem obu spójników porządku i implikacji jest zwrotność i przechodniość.

Logiki z implikacją → są domknięte na regułę odrywania (r_o) i regułę poprzedzania (r_p), podczas gdy teorie ze spójnikiem porządku „≤" są domknięte na słabszą regułę niż reguła odrywania (r_o), a mianowicie na regułę:

(r_3) ($\alpha \leq \beta$), ($\beta \leq \alpha$), $\alpha \vdash \beta$, czyli na regułę słabego odrywania w terminologii Czelakowskiego.

W literaturze logicznej oprócz logik ze spójnikiem porządku oraz pojedynczych teorii, w których jest definiowalny spójnik porządku, rozważany był *spójnik porządku na gruncie klasy teorii*. W pracy (Omyła, 1979) przyjęta jest następująca definicja:

Metadefinicja 4.

Funktor „≤" jest spójnikiem porządku na gruncie klasy teorii K, gdy dla każdej teorii T z klasy K oraz dla dowolnych formuł α, β, γ ze zbioru wszystkich formuł danego języka spełnione są następujące trzy warunki:

(I) $(\alpha \leq \alpha) \in T$,

(II) jeżeli $(\alpha \leq \beta) \in T$ oraz $(\beta \leq \gamma) \in T$, to $(\alpha \leq \gamma) \in T$,

(III) jeżeli $(\alpha \leq \beta) \in T$ oraz $(\beta \leq \alpha) \in T$, to $(\alpha \equiv \beta) \in T$.

W piśmiennictwie logicznym rozważane były porządki na gruncie ważnych z filozoficznego punktu widzenia klasach teorii: WB, WT, WBQ, WTQ i WHQ-teorii.

7. Uwagi końcowe

W pracy zostały przedstawione prawie że chronologicznie najważniejsze rezultaty dotyczące spójnika porządku uzyskane w ramach badań nad logiką niefregowską.

Z semantycznego punktu widzenia, funktor „≤" jest spójnikiem porządku w logice (L,C), gdy dla dowolnych formuł α, β języka L spełniony jest warunek:

(*) jeżeli $(\alpha \leq \beta) \in C(X)$, to między korelatami semantycznymi zdań α, β zachodzi pewna relacja porządkująca.

Warunek (*) winien być spełniony dla każdej interpretacji języka L zgodnej z zasadami niefregowskiej semantyki zdań.

Z kolei metadefinicja 3 wskazuje, że można podać definicję spójnika porządku w sposób czysto syntaktyczny bez odwoływania się do interpretacji języka, a jedynie do reguł składniowych i dedukcyjnych obowiązujących w danym rachunku logicznym.

Definicje zarówno semantyczna, jak i syntaktyczna charakteryzują spójnik porządku jedynie w sposób formalny. Stwierdzają one, że spójnikowi porządku odpowiada relacja porządkująca uniwersum korelatów semantycznych zdań. Powstaje pytanie o to uniwersum. Za Wittgensteinem przyjmujemy, że jest to uniwersum sytuacji.

Elementami tego uniwersum nie są przedmioty tylko możliwości opisywane w dowolnym ludzkim języku.

Według interpretacji Suszki najprostsze sytuacje są konfiguracjami przedmiotów, a pozostałe są złożeniami tych konfiguracji.

Sytuacje podobnie jak przedmioty mają własności. Ontologicznymi własnościami sytuacji są: konieczność, możliwość bądź faktyczność danej sytuacji. Według Suszki sytuacje mogą być konieczne, rzeczywiste, możliwe bądź niemożliwe. Nie jest to w pełni zgodne z *Traktatem*, gdyż według Wittgensteina nie ma sytuacji koniecznych i niemożliwych, są tylko sytuacje możliwe. Sytuacje pozostają również między sobą w relacjach, na przykład jedna sytuacja pociąga drugą lub wyklucza się z drugą, bądź są od siebie niezależne. Jednym z rodzajów relacji między sytuacjami są relacje porządkujące, które są korelatami semantycznymi spójników porządku. Sytuacje różnią się od przedmiotów tym, że są dane przez zdania, a nie przez nazwy. Nazwy oznaczają lub wskazują swoje desygnaty, a zdania podlegają asercji i mają swoje konsekwencje logiczne. Różnice syntaktyczne między nazwami i zdaniami przenoszą się na opisywane przez nie korelaty semantyczne. Dlatego Suszko w pierwszej swej rozprawie z zakresu logiki niefregowskiej, jaką była recenzja pracy habilitacyjnej Wolniewicza napisana w 1966 roku, zamiast mówić o własnościach sytuacji i relacjach między sytuacjami pisał o pseudocechach sytuacji i pseudorelacjach między sytuacjami. Sytuacja, będąc konfiguracją przedmiotów bądź splotem takich konfiguracji, jest tworem złożonym, czyli jest pewną całością, którą opisujemy w zdaniu. Relacje porządkujące między sytuacjami są relacjami między takimi całościami i raczej nie powinniśmy wyobrażać ich sobie jak relacje między liczbami bądź zbiorami, tylko raczej w sposób zbliżony do relacji zachodzących między modelami teorii pierwszego rzędu bądź innymi złożonymi tworami matematycznymi.

Bibliografia

Czelakowski, J. (2022). Działalność naukowa Suszki w okresie wrocławskim. Operator Suszki. W: *Język, struktura, ontologia. Pamięci Romana Suszki*, red. D. Leszczyńska-Jasion, S. Chlebowski, A. Tomczyk, A. Zakosztowicz, s. 125–144. Poznań: Wydawnictwo UAM.

Omyła, M. (1976). Translatability in Non-Fregean Theories, *Studia Logica* 36, s. 127–138.

Omyła, M. (1978). Boolean Theories with Quantifiers, *Bulletin of the Section of Logic* 7 (2), s. 76–83.

Omyła, M. (1979). Propositional Quantifiers in Non-Fregean Theories. W: *Begriffsschrift: Jenear Frege-Konferenz*, red. D. Alexander, s. 299–306.

Omyła, M. (2012). *Definicje w logice niefregowskiej*. W: IX Polski Zjazd Filozoficzny. Księga Streszczeń, s. 528–529. Wisła.

Omyła, M., Suszko, R. (1972a). Descriptions in Theories of Kind W. *Bulletin of the Section of Logic* 1 (3), s. 8–13.

Omyła, M., Suszko, R. (1972b). Definitions in Theories of Kind W. *Bulletin of the Section of Logic*" 1 (3), s. 14–19.

Suszko, R. (1968a). Ontologia w *Traktacie* L. Wittgensteina. *Studia Filozoficzne* 1, s. 97–121.

Suszko, R. (1968b). Non-Fregean Logic and Theories. *Analele Universitatii Bucuresti. Acta Logica* 9, s.105–125.

Suszko, R. (1971a). Identity Connective and Modality. *Studia Logica* 27, s. 7–39.

Suszko, R. (1971b). Reifikacja sytuacji. *Studia Filozoficzne* 69, s. 65–82.

Suszko, R. (1975). Remarks on Three-Valued Logic. *Bulletin of the Section Logic 4*(3), s. 87–90.

Suszko, R. (2022). Recenzja pracy dr. Bogusława Wolniewicza pt. „Studia nad filozofią Wittgensteina" przedstawionej Radzie Wydziału Filozoficznego w celu uzyskania stopnia docenta. W: *Język, struktura, ontologia. Pamięci Romana Suszki*, red. D. Leszczyńska-Jasion, S. Chlebowski, A. Tomczyk, A. Zakosztowicz, s. 383–405. Poznań: Wydawnictwo UAM.

Suszko, R. (2022). O kongruencjach w rachunkach zdań, spójniku porządku i konsekwencjach inwariantnych, red. J. Zygmunt. W: *Język, struktura, ontologia. Pamięci Romana Suszki,* red. D. Leszczyńska-Jasion, S. Chlebowski, A. Tomczyk, A. Zakosztowicz, s. 383–405. Poznań: Wydawnictwo UAM.

Wawrzyńczak, R. (1973). Some Boolean Theories in SCI. *Bulletin of the Section of Logic 2*(3), s. 197–204.

Wittgenstein, L. (1997) *Tractatus logico-philosophicus*. Przeł. B. Wolniewicz. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Wolniewicz, B. (2019). *Ontologia sytuacji*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Podziękowanie

Dziękuję Panom Redaktorom Markowi Magdziakowi i Marcinowi Selingerowi za umożliwienie mi zamieszczenia niniejszego opracowania w Księdze, która uhonorowuje Pana Profesora Jana Zygmunta, mojego niezawodnego Kolegę i Przyjaciela od zawsze, a przynajmniej od 1970 roku.

Remarks on the connective of order

Abstract: This article discusses the intuitive reasons for introducing the connective of order into the logical calculus. It presents chronologically the most important results concerning the connective obtained in the research on non-Fregean logic. The article provides a syntactic and semantic characterization the connective of order. The role of this connective in the theory of definitions and in ontology is also discussed.

Furthermore, it describes the similarities and differences between the order connective and the implication connective.

Marcin Selinger
Uniwersytet Wrocławski | ORCID: 0000-0002-9685-6684

Argumentacja *ad hominem* a imperatyw kategoryczny Kanta

Abstrakt: Artykuł dotyczy tego rodzaju argumentacji ad hominem, w której zarzuca się komuś niezgodność głoszonych poglądów z postępowaniem. Naszym celem jest, obok przedstawienia sposobów sformułowania przesłanek takiej argumentacji, analiza rozmaitych możliwych konkluzji, a w szczególności tych, które mają charakter ocen moralnych. Jako podstawę rozważań przyjmujemy imperatyw kategoryczny Kanta, zakładając postulowany przezeń ustawodawczy charakter wolnej woli. W wyniku rozważań wyróżniamy trzy rodzaje ataku na etos retoryczny przeciwnika: (I) na jego zdolności logiczno-poznawcze, (II) intencje i (III) kompetencje komunikacyjne oraz cechy wolicjonalno-moralne.

Słowa kluczowe: argumenty *ad hominem*, argumentacja etyczna, etos, argumenty *ex concessis*, imperatyw kategoryczny

1. Wprowadzenie

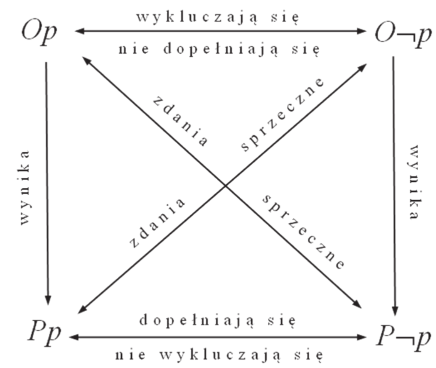
Literatura na temat argumentów *ad hominem* jest bogata i pobudza do refleksji na temat uczciwości ich użycia. Rzadziej jednak dostrzega się głębszy związek między tym typem argumentacji a problematyką etyczną. Ważnym przykładem takiego podejścia są niewątpliwie rozważania Richarda M. Hare'a, który w swojej książce *Freedom and Reason* przekonywał, że „wszelkie argumenty moralne są *ad hominem*" (Hare, 1965, s. 111), bowiem ich źródłem jest rodzaj empatii, realizującej się w wyobrażonym akcie postawienia się w czyjejś roli, „wejścia w czyjeś buty" (por. Ezorsky, 1966, s. 120). Pewnym potwierdzeniem słuszności intuicji Hare'a może być fakt, że podawane w literaturze przykłady i schematy tych argumentów często dotyczą właśnie norm i ocen moralnych. Celem niniejszych rozważań jest systematyczne zbadanie pewnej klasy argumentów *ad hominem* nie jako form perswazji przygodnie uwikłanych w etyczny kontekst ich użycia, lecz jako specyficznych argumentów o treści moralnej. W wyniku analizy wykorzystującej ocenę logicznych podstaw zasadności tego rodzaju argumentów przedstawimy propozycję modelu ich retorycznego i dialektycznego opisu, opartego na idei ujmowania *ad hominem* jako techniki ataku na etos.

W literaturze przedmiotu daje się wyodrębnić dwie odmienne dialektyczne tradycje rozumienia argumentacji *ad hominem*. Pierwsza, klasyczna, wywodząca się ze starożytności, utożsamia *ad hominem* z argumentacją *ex concessis* (pol. *z uznanego*, ang. *from commitment*), której przesłanki powołują się na poglądy adwersarza. Mamy tu do czynienia z pozytywnym i negatywnym *ex concessis*. W wersji pozytywnej poglądy adwersarza to wprost przesłanki argumentacji. Nie chodzi tu przy tym o dowolne poglądy, bo wszak każda, przekonująca argumentacja powinna być oparta na przesłankach zaakceptowanych przez jej adresata. Chodzi tu raczej o szczególny przypadek, gdy wykorzystywany w charakterze przesłanki pogląd nie jest poglądem uznanym przez nas samych. Godzimy się więc z błędnym w naszym mniemaniu dowodem, byle tylko przeforsować jego tezę. Nie ma tu żadnego wzoru czy schematu, bo definicja odnosi się tylko do samych przesłanek i ich odmiennego stosunku do wiedzy nadawcy i adresata. Natomiast negatywne *ex concessis* ma bardziej formalny charakter i polega na wskazywaniu logicznych niezgodności między poglądami adwersarza. W wypowiedziach tego typu konkluzja nie zawsze bywa sformułowana wyraźnie, a samowskazywanie na niezgodności nie stanowi jeszcze argumentu. Wydaje się jednak jasne, że celem takiego ataku jest zawsze zdyskredytowanie jakichś poglądów lub głoszącej je osoby. Jeśli więc dopatrywać się tu argumentów, to dałoby się wyróżnić dwie klasy schematów. W pierwszej z nich konkluzja wskazuje na zdanie lub grupę zdań, które na mocy zarzucanej niezgodności są niewiarygodne (ewentualnie też na te zdania, które w tej sytuacji są właśnie wiarygodne). W drugiej bezpośrednia konkluzja dotyczy raczej osoby adwersarza i jego kompetencji, a dopiero w dalszej perspektywie również poglądów. Można by rzec, że w pierwszym przypadku pozostajemy tylko w obrębie logosu, w drugim przenosimy atak na etos adwersarza, wykraczając w ten sposób poza czysto dialektyczne rozumienie *ad hominem*. Takie retoryczne rozszerzenie — jeśli się na nie zgodzimy — stanowi pewien pomost między ujęciem klasycznym a współcześnie bardziej rozpowszechnionym podejściem, zbliżającym rozumienie argumentacji *ad hominem* do ataku *ad personam*. Tutaj to ze stwierdzenia pewnej cechy lub cech osoby adwersarza, jego postępowania, zachowania itp. wyprowadza się wnioski na temat niewiarygodności jego poglądów. Można więc traktować to rozumienie jako swoiste uzupełnienie rozszerzonego ujęcia klasycznego, pozwalające na powrót do sfery logosu — najpierw z niezgodności pewnych poglądów adwersarza dochodzimy do jego niekompetencji (konkluzja pośrednia), by z kolei niekompetencją uzasadniać niewiarygodność tych właśnie lub, dodatkowo, jeszcze innych jego poglądów. Dodanie takiej konkluzji pośredniej może więc mieć na celu uogólnienie i przez to wzmocnienie konkluzji głównej. Tak czy inaczej, intencje obu tradycji definiowania *ad hominem* wydają się jasne. W ujęciu klasycznym chodzi raczej o odwoływanie się do tego, co ktoś powiedział, a w ujęciu współczesnym – do tego, jaki ktoś jest lub jak się zachowuje. Oczywiście, argumentacja może łączyć w sobie obie te rzeczy, więc niektóre argumenty będą uważane za *ad hominem* w świetle obu tradycji. Przykładem tego rodzaju są argumenty, w których zarzuca się komuś niezgodność głoszonych poglądów z postępowaniem, będące głównym tematem niniejszego opracowania (por. Walton, Reed i Macagno, 2008; *pragmatic* (s.148), *universal* (s. 150) oraz *group circumstantial ad hominem* (s. 151), a także *situationally disqualifying ad hominem* (s. 154))[1].

Owa niezgodność w szczególnym przypadku może mieć charakter ontyczny, gdy ktoś po prostu opisuje swoje zachowanie niezgodnie z rzeczywistością. Bezpośrednia konkluzja takiego semantycznego zarzutu będzie wtedy dotyczyć mówienia nieprawdy. Może ono mieć różne źródła, w tym również takie, które podlegają ocenie moralnej. My jednak chcemy się zająć sytuacją, w której zarzut odnosi się nie do opisu, ale do normy postępowania. Wtedy niezgodność z zachowaniem będzie miała charakter praktyczny, gdy działanie nie prowadzi czy wręcz odwodzi od jakiegoś zadeklarowanego, hipotetycznego celu, lub deontyczny, gdy łamana norma ma charakter moralny i nakazuje, zakazuje bądź zezwala na jakieś działanie kategorycznie, to jest bez względu na konkretny, praktyczny cel. W tym ostatnim przypadku, który nas tu właśnie interesuje, niezgodność deklarowanych przekonań i postępowania podlega moralnej ocenie niejako z samej natury rzeczy.

1 Schematy, które podają Walton, Reed i Macagno (2008), wraz z przedstawioną tam klasyfikacją argumentów *ad hominem* (s. 358) i innych związanych schematów (s. 352), zostały zaczerpnięte z monografii Waltona (1998).

Przede wszystkim należy tu zauważyć, że z logicznego punktu widzenia pomiędzy normą a zachowaniem nie ma niezgodności o charakterze formalnym. Obowiązująca norma, to jest zdanie mówiące, że pewne działanie (*p*) jest *nakazane* (*Op*) lub *zakazane* (*O¬p*), czyli *nie-dozwolone* (¬*Pp*), nie wyklucza bowiem tego, że rzeczy faktycznie toczą się inaczej i norma jest łamana, co nie jest możliwe w przypadku obowiązujących praw przyrody. Prawami logiki deontycznej nie są więc formuły: O*p*→*p* ani *p*→*Pp*. Tak w każdym razie rozumieć będziemy tu modalności deontyczne, co nie wyklucza dalszych, poszerzonych badań, które by brały pod uwagę także inne ich rodzaje. Tymczasem, przy przyjętej tu interpretacji słów „nakazane” i „dozwolone” podstawowe stosunki logiczne, jakie zachodzą między zdaniami normatywnymi, wyraża przedstawiony na Rysunku 1 diagram, stanowiący deontyczną wersję *kwadratu logicznego* (por. Ziembiński, 1994, s. 128):



Rysunek 1.

Niezgodność między zdaniami normatywnymi dotyczy zdań u góry kwadratu („nakazane” i „zakazane”), które się wykluczają (to jest, nie mogą być współprawdziwe), a także zdań po przekątnej („nakazane” i „fakultatywne”, a także „zakazane” i „dozwolone”), które są sprzeczne, czyli się wykluczają, a ponadto się dopełniają (to jest, nie mogą być współfałszywe). Zdania normatywne pozostają w stosunkach logicznych tylko z innymi zdaniami normatywnymi, a co za tym idzie, żeby stwierdzić niezgodność między normą a rzeczywistym postępowaniem potrzebna jest jeszcze jakaś osobna zasada, która umożliwiałaby przechodzenie od zdań opisowych o działaniach do zdań normatywnych i *vice versa*. Jako założenie badawcze zakładamy w niniejszej pracy, że jest nią *imperatyw kategoryczny* — zasada formalna wprowadzona pod tą nazwą do etyki przez Immanuela Kanta. W swym podstawowym sformułowaniu (*Formuła Uniwersalnego Prawa Natury*, ang. *The*

Formula of the Universal Law of Nature)[2] imperatyw kategoryczny nakazuje (*Uzasadnienie metafizyki moralności* 4:421)[3]:

> Postępuj tylko według maksymy, dzięki której możesz zarazem chcieć, żeby stała się powszechnym prawem.

Powyższe sformułowanie wyklucza oczywiście postępowanie wbrew maksymie, o jakiej w nim mowa. Jeśli zatem założyć, że owa maksyma to właśnie normatywny pogląd, który się głosi (w przeciwnym razie mamy do czynienia z nieszczerością), to zarzut o niezgodność poglądu z postępowaniem okazuje się być po prostu zarzutem o naruszenie imperatywu kategorycznego. A to pociąga za sobą konsekwencje, do których prowadzi łamanie tej naczelnej i, według Kanta, jedynej niepodważalnej zasady moralnej. Zanim jednak zajmiemy się tymi konsekwencjami (rozdz. 3), rozważymy z logicznego punktu widzenia sformułowania samego zarzutu, rozpoczynając przy tym od odpowiedzi na kluczowe pytanie, jaką maksymę (normę) postępowania można na podstawie imperatywu kategorycznego odczytać z samego czyjegoś zachowania, aby ją później zestawić czy to z głoszonym, czy z jakimkolwiek innym poglądem, i móc stwierdzić ich ewentualną niezgodność (rozdz. 2).

Warto odnotować, że niezależnie od miejsca, jakie imperatyw kategoryczny zajmuje w filozofii Kanta, wyraża on (między innymi) pewną wręcz narzucającą się zasadę moralną, eksplikowaną w wielu, jeśli nie we wszystkich kulturach, i formułowaną na wiele sposobów w źródłach religijnych, rozmaitych pismach czy znanych porzekadłach jako tzw. *Złota Reguła* („traktuj drugiego tak, jak byś sam chciał być traktowany", „nie czyń drugiemu, co tobie niemiłe"), a więc zasadę głęboko zakorzenioną w naszej intuicji etycznej. Niniejszy artykuł stanowi opartą na tej intuicji próbę ugruntowania określonej powyżej klasy argumentów, zaliczanych do szeroko rozumianego rodzaju *ad hominem*. Tym, co odróżnia nasze ujęcie od podejścia Hare'a, który w swoich rozważaniach o argumentacji *ad hominem* koncentruje się na obecnej już w *Złotej Regule* inferencyjnej roli empatii, jest propozycja, by w istotny sposób wykorzystać zawartą w imperatywie kategorycznym Kanta ideę prawodawczego potencjału wolnej woli.

---

2 Angielskie nazwy Kantowskich sformułowań imperatywu kategorycznego (przełożone ma polski przeze mnie) zostały zaczerpnięte z artykułu Johnsona i Curetona (2022), zamieszczonego w *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

3 Cytaty z *Uzasadnienia metafizyki moralności* Immanuela Kanta w przekładzie Mścisława Wartenberga pochodzą z wydania (Kant, 2001).

2. Przesłanki zarzutu o niezgodność poglądu z postępowaniem

Zacznijmy zatem od pytania o maksymę (normę) postępowania, którą da się odczytać na podstawie imperatywu kategorycznego tylko z czyjegoś zachowania. Czyn jako taki ma charakter jednostkowy, więc i maksyma, której szukamy, też taki musi mieć, bowiem wiemy jedynie, że dotyczy ona tego właśnie działania, które zostało wykonane. Jeśli ktoś przechodzi przez jezdnię na pasach, to nie wiadomo, o ile nas o tym osobno nie poinformuje, czy maksyma, wedle której działa, dotyczy jakichś innych podobnych przypadków i pod jakim względem miałyby one być do siebie podobne. Nie wiemy na przykład, czy owa maksyma dotyczy wszelkiego przechodzenia na pasach, czy wszelkiego przechodzenia przez jezdnię, czy też chodzenia po wszelkich pasach, a może dotyczy ona po prostu swobodnego poruszania się wszędzie. Nie wiemy również, czy kwantyfikacja określonego aspektu działania jest jakoś ograniczona, czy nasza maksyma dotyczy przechodzenia tylko na tej ulicy, w tej dzielnicy, mieście, kraju itp. Nie wiemy, czy może obowiązuje tylko w specjalnych okolicznościach, gdy są na przykład jakieś dodatkowe znaki (jak światła), które na to zezwalają. Być może też działanie, które rozpatrujemy, jest elementem w ciągu innych działań i tylko wtedy stosuje się do niego poszukiwana norma, gdy wcześniej zostały wykonane jakieś inne czynności (na przykład zatrzymanie się i rozglądnięcie, czy nic nie jedzie). Jeśli więc chcemy zakres poszukiwanej maksymy jakoś uogólnić bądź przenieść na inne przypadki, to trzeba się uciec do wnioskowania — indukcyjnego w pierwszym przypadku, a w drugim — z podobieństwa. Inaczej, na pierwszy rzut oka, ma się sprawa z uogólnianiem maksym ze względu na inne osoby uwikłane w rozważane działanie. Podkreślając powszechność obowiązywania norm moralnych, powinniśmy postulować tu nieograniczoną kwantyfikację uniwersalną. Jeżeli norma obowiązuje pewną osobę, to powinna obowiązywać także każdą inną osobę. Podobnie, jeśli norma dotyczy działania nakierowanego na jakąś osobę, to powinna dotyczyć też działania nakierowanego na dowolną inną osobę. Jeśli więc mam obowiązek przepuścić przechodnia, to każdy na moim miejscu powinien przepuścić nie tylko tego, ale każdego przechodnia. Tu jednak wracamy do poprzedniego problemu, bo przecież nie w każdej sytuacji — nie ma obowiązku przepuszczania kogoś, kto stoi na czerwonym świetle lub chce przejść przez autostradę. W obronie własnej wolno zranić lub nawet zabić napastnika, ale nie wolno ranić ani zabijać wszystkich. Takie czy inne sytuacyjne ograniczenia obowiązywania norm odczytywanych z zachowań należy więc brać pod uwagę i w razie potrzeby uwzględniać)[4]. Chcąc odpowiedzieć na pytanie „które?", nie jesteśmy całkiem bezbronni. Niebagatelną rolę będzie tu odgrywać ocena skutków działania, bowiem to te jego aspekty, które niosą za sobą potencjalne niedogodności bądź niebezpieczeństwo dla innych, stanowią naturalne kryterium oceny – wszak odpowiedzialna osoba powinna w trosce o innych swoje postępowanie kontrolować. Zazwyczaj mamy też do dyspozycji rozmaite przesłanki domyślne, które pozwalają nam zinterpretować czyjeś zachowanie i wyłonić te jego aspekty, które podlegają uogólnieniu. Chodzi tu o rozmaite uwarunkowania kulturowe i społeczne, obyczaje, przyjęte prawodawstwo, które — przy założeniu, że rozważana osoba je zna — pozwolą nam się zorientować, jakie cechy jej zachowania, ewentualnie inne uwikłane w to zachowanie osoby lub okoliczności, są tu istotne. W przypadku przechodzenia przez jezdnię bardzo przydatne będą oczywiście przepisy ruchu drogowego. Wyodrębnianie i uogólnianie aspektów rozważanego działania przypomina więc proces wydobywania implikatur. Trzeba założyć, że oprócz posiadania pewnej wiedzy obserwowana osoba wie, że ta wiedza jest wspólna jej społecznemu otoczeniu, a jej postępowanie będzie przez to otoczenie interpretowane właśnie w świetle tej wiedzy. Zawsze będzie to jednak jakieś rozumowanie zawodne, niededukcyjne. Jeśli chcemy pozostać na gruncie dedukcji, to poszukiwana maksyma może dotyczyć jedynie działania, które zostało wykonane. Tyle, jeśli chodzi o ogólność odczytywanej normy. Przejdźmy teraz do kwestii jej deontycznej modalności.

Z tego, że ktoś postąpił w pewien określony sposób, można wnosić, że działa wedle maksymy, która na to postępowanie zezwala. Czy jednak działa w ten sposób również z obowiązku, czy mógł równie dobrze owego działania zaniechać — tego z samego opisu działania wywieść nie sposób. Dopiero musiałby nas o tym dodatkowo powiadomić. Podobnie z faktu, że ktoś pewnego działania nie wykonał, nie wiemy, czy powstrzymał się przed tym ze względu na jakiś zakaz, którym się kierował. Tak więc nawet wtedy, gdy norma, którą jesteśmy w stanie odczytać, wynika z jakiejś maksymy o postaci powinności lub zakazu, którą ktoś się kierował, to z samego działania (odpowiednio: braku działania) wnosić możemy co najwyżej, że według niego wolno je było wykonać (odpowiednio: zaniechać). Na mocy kwadratu logicznego (rys. 1) zdania o postaci: Pp oraz: $P\neg p$ wykluczają się jedynie ze zdaniami (odpowiednio): Op oraz: $O\neg p$. Dlatego zarzut o niezgodność poglądu

4 Zasadność uzależnienia obowiązywania norm moralnych od kontekstu sytuacyjnego jest przedmiotem wielu filozoficznych kontrowersji. Krytycznego przeglądu stanowisk w tej sprawie dokonuje Ziobrowski (2013).

i postępowania ma w swej podstawowej postaci jedynie dwie logicznie dopuszczalne formy:

(1) *Twierdzisz,* że *wykonanie działania p jest obowiązkiem (Op), ale ty działania p nie wykonałeś (¬p)* [*z czego można wnosić, że uważasz je za fakultatywne (P¬p)*];

(2) *Twierdzisz, że wykonanie działania p jest zakazane (O¬p), ale ty działanie p wykonałeś (p)* [*z czego można wnosić, że uważasz je za dozwolone (Pp)*].

Natomiast (z pewnymi istotnymi wyjątkami, o których powiemy za chwilę) raczej nie znajdziemy w użyciu dwóch pozostałych schematów, w których zarzucałoby się, że ktoś głosi maksymę mówiącą, że jakieś działanie jest dozwolone (*Pp*) lub fakultatywne (*P¬p*), to jest, odpowiednio: *Twierdzisz, że wolno tak a tak postępować, a sam...* oraz *Twierdzisz, że wolno tego nie zrobić, a sam...*. Zarówno jeśli ktoś to działanie wykonał (*p*), jak i w przeciwnym wypadku (*¬p*), nie będziemy w stanie uczynić z tego żadnego logicznego zarzutu i w sensowny sposób uzupełnić powyższe schematy (to jest wstawić „*p*” lub „*¬p*” w puste miejsce). Właśnie dlatego, że nie potrafimy na podstawie samego działania (czy to będzie działanie: *p*, czy: *¬p*) stwierdzić, że postępował wedle jakiejś maksymy dotyczącej, odpowiednio, zakazu (*O¬p*) lub obowiązku (*Op*), a tylko takie maksymy wykluczałyby się na mocy kwadratu logicznego (rys. 1) ze wskazywanymi w rozważanym przypadku poglądami o postaci (odpowiednio): *Pp* lub *P¬p*. Innymi słowy, o słuszności głoszonych norm, które zezwalają na wykonanie lub zaniechanie wykonania pewnej czynności, można swoim postępowaniem zaświadczyć („potwierdzić” je), ale ich słuszności nie można w ten sposób podważyć („sfalsyfikować”). Jedyne, co w tej sytuacji można uczynić, to erystycznie podać w wątpliwość szczerość czyichś (komunikacyjnych) intencji: *Twierdzisz, że wolno pić, to dlaczego ze mną się nie napijesz?*

Sygnalizowane powyżej istotne wyjątki, kiedy to zarzut stwierdza niezgodność działania z pewną normą, głoszącą, że coś wolno uczynić, bądź czegoś wolno zaniechać, dotyczą działań, które mają charakter językowy, a więc aktów mowy. Są to przede wszystkim te akty mowy, w których wprost się coś nakazuje, czegoś się zabrania lub na coś się zezwala, czyli tzw. dyrektywy, a także te, w których ustanawia się wprost pewną normę prawną, czyli tzw. deklaratywy. Oto przykłady argumentów, w których z odpowiednim aktem mowy (druga przesłanka) zestawia się głoszony pogląd normatywny (pierwsza przesłanka) o każdej z czterech podstawowych postaci, podanych w narożnikach deontycznego kwadratu logicznego, przy czym dwa pierwsze przykłady nie mają odpowiedników porównujących głoszony pogląd ze zwykłym, to jest pozajęzykowym działaniem[5], jak to domyślnie przewidują schematy (1) i (2):

— Twierdzicie, że wolno krytykować władzę, a swoją ustawą de facto krytyki zabraniacie.

— Twierdzisz, że każdy ma prawo nie chodzić do kościoła, a swoim dzieciom co niedzielę każesz iść na mszę.

— Twierdzisz, że nie wolno palić śmieci, a stróżowi pozwoliłeś spalić te stare opony.

— Twierdzisz, że trzeba ubierać się ciepło, a pozwoliłeś dziecku nie wziąć szalika.

Odpowiadają im cztery schematy:

(3) *Twierdzisz, że wykonanie działania p jest dozwolone, ale osobie (grupie osób) X zabraniasz wykonania działania p* [*z czego można wnosić, że uważasz je za zabronione (O¬p)*].

(4) *Twierdzisz, że zaniechanie działania p jest dozwolone, ale osobie X nakazujesz wykonanie działania p* [*z czego można wnosić, że uważasz je za nakazane (Op)*].

(5) *Twierdzisz, że wykonanie działania p jest obowiązkowe, ale osobie X pozwalasz nie wykonać działania p* [*z czego można wnosić, że uważasz je za fakultatywne (P¬p)*].

(6) *Twierdzisz, że działanie p jest zakazane, ale osobie X pozwalasz na wykonanie działania p* [*z czego można wnosić, że uważasz je za dozwolone (Pp)*].

Schematy (5) i (6) to performatywne odpowiedniki schematów (1) i (2). Natomiast schematy (3) i (4) nie mają swych odpowiedników w przypadku, gdy wskazywane w zarzucie działanie nie jest z założenia aktem mowy. W odniesieniu do deklaratywów zamiast bezpośredniego odwołania do nakazu, zakazu lub pozwolenia można wskazać akt powołujący do życia stosowną normę prawną, jak w przykładzie o krytykowaniu władzy, egzemplifikującym schemat (3).

Oprócz nakazywania, zabraniania i zezwalania także inne akty mowy nadają się do wykorzystania w drugiej przesłance schematów (3)–(6).

---

5 W szczególnych przypadkach działanie, o którym mowa w drugiej przesłance schematów (1) i (2), również może mieć językowy charakter (jak np. kłamstwo, obelga), jednak wtedy samo to działanie jest przedmiotem normy stanowiącej pogląd wskazywany w przesłance pierwszej (np. *Twierdzisz, że nie wolno kłamać, a sam kłamiesz*). Tymczasem w podanych tu przykładach i odpowiadających im schematach (3)–(6) nie same akty mowy przywoływane w przesłance drugiej, tj. nakazywanie, zabranianie czy zezwalanie, stanowią ów przedmiot normy, lecz to, co się za pomocą tych aktów nakazuje, zabrania czy też zezwala (np. *Twierdzisz, że nie wolno kłamać, ale mi skłamać każesz*).

Na przykład obiecywanie, zalecanie, wymaganie, odradzanie czy nakłanianie też może stanowić czynność będącą przedmiotem zarzutu:

— *Potępiasz agresję w obecności dzieci, ale obiecałeś synowi, że go weźmiesz na galę boksu*.

— *Mówi Pan, że nieporozumienia wewnątrz koalicji należy załatwiać w zaciszu gabinetów, a w swoim wywiadzie otwarcie krytykuje Pan szefa partii koalicyjnej*.

— *Twierdzisz, że nie wolno kraść, a namawiasz innych.*

Zauważmy, że aktem mowy jest też głoszenie takiego czy innego poglądu, o którym mowa w pierwszej przesłance zarzutu. Akt taki zakłada, że osoba ów pogląd głosząca sama go akceptuje. Podobnie więc jak w przypadku drugiej przesłanki, która ma się odnosić do postępowania, można i w pierwszej przywoływać rozmaite akty mowy osoby atakowanej, o ile tylko zakładają, że uważa ona wskazywany pogląd za słuszny:

— *Zabraniasz mi palić, a sam palisz.*

— *Każesz mi być cicho, a sam ciągle gadasz.*

— *Podajesz racje za koniecznością bezwzględnego przestrzegania prawa, a właśnie co przeszedłeś na czerwonym.*

W szczególności aktem mowy wskazywanym przez pierwszą przesłankę, czyli tę odnoszącą się do głoszonego poglądu, może być, jak w ostatnim przykładzie, argumentowanie. Oczywiście przywoływanym poglądem jest tu zazwyczaj konkluzja argumentacji (por. Walton, Gordon i Macagno, 2008, s. 148 i nast.), ale nic nie stoi na przeszkodzie, aby to były też przesłanki, a nawet samo przekonanie, że konkluzja wynika z przesłanek. Liczy się asercja, która towarzyszy zdaniom wypowiadanym przez adresata zarzutu. Idąc dalej tym tropem, można by wyróżnić także czysto performatywne wersje omawianego zarzutu, w których wskazuje się na niezgodność pomiędzy samymi aktami mowy. Zaciera to poniekąd różnicę między specyficznym charakterem obu przesłanek, zbliżając rozpatrywany tu rodzaj *ad hominem* do negatywnego *ex concessis*. Oto przykłady:

— *Jemu pozwalasz, a mi zabraniasz.*

— *Nam każecie stać w kolejce, a ich prosicie, żeby wchodzili bez czekania.*

Wskazanie normatywnego poglądu osoby atakowanej może się też odbyć za pomocą argumentu wysuniętego przez samego atakującego. Argument taki pełni wtedy rolę zastępczą wobec (tu: tylko potencjalnego) aktu mowy atakowanego, powiadamiającego o jego przekonaniach. Do tej kategorii należą przykłady z *Erystyki* Schopenhauera, w których głoszony pogląd przypisuje się *ex concessis* adresatowi zarzutu na podstawie innych jego wypowiedzi (Schopenhauer, 1973, s. 63):

> Jeżeli na przykład przeciwnik broni samobójstwa, krzyczymy zaraz: „To dlaczego sam się nie powiesisz?". A jeśli twierdzi na przykład, że pobyt w Berlinie jest nieprzyjemny, natychmiast zawołamy: „To dlaczego natychmiast nie wyjeżdżasz najbliższą ekstrapocztą?".

Do sformułowania przesłanki takiego zastępczego argumentu służy czasem, zamiast przywołania czyjejś wypowiedzi, wykazanie bądź po prostu stwierdzenie przynależności do pewnej grupy (organizacji, sekty), którą da się jakoś powiązać z wytykanym poglądem (*group circumstantial ad hominem*). Przykładem niech będzie obarczanie katolików wszelkimi poglądami głoszonymi przez papieża. Można też w ogóle nie odwoływać się do żadnego aktu językowego ze strony osoby atakowanej. Wystarczy wygląd, ubiór czy jakaś okoliczność, w której ktoś się znalazł. Jak zauważa Schopenhauer (1973, s. 63), „jakąś szykanę zawsze będzie można wynaleźć". Tak czy inaczej, norma, która ma być zestawiona z zachowaniem, musi być jakoś werbalnie zakomunikowana jako pogląd adresata zarzutu, nawet jeśli on sam tego nie uczynił. Takie komunikacyjne zastępowanie osoby atakowanej w roli głosiciela jej poglądów stanowi oczywiście świetną okazję do erystycznych nadużyć, które eksponuje Schopenhauer.

Reasumując, omawiany tu zarzut dotyczy zawsze pewnego rodzaju działań, w tym przynajmniej niektóre z nich muszą być (faktycznymi bądź chociaż potencjalnymi) działaniami komunikacyjnymi. Natomiast zarzucana niezgodność między nimi ma charakter logiczny i odnosi się do sądów, będących czy to (*I*) wprost treściami przywoływanych aktów mowy, czy to (*II*) domniemaniami wypływającymi z warunków ich poprawności (skuteczności, fortunności), czy też wreszcie (*III*) odczytywanymi na podstawie jakiejś czynności (zazwyczaj pozakomunikacyjnej, choć niekoniecznie) moralnymi normami (maksymami), zezwalającymi na jej wykonanie, którymi w myśl imperatywu kategorycznego powinniśmy się kierować. Występowanie tego ostatniego rodzaju sądów odróżnia określone w punkcie wyjścia przypadki „niezgodności" (schematy (1) i (2)) od negatywnego *ex concessis*.

3. Możliwe konkluzje zarzutu o niezgodność poglądu i postępowania

Już samo przeciwstawienie głoszonych poglądów i postępowania danej osoby stanowi atak na jej etos. Można to rozumieć tak, że nie mamy żadnej wyraźnie sformułowanej konkluzji (por. Budzynska, Witek, 2014), a zaatakowana osoba zostaje pozbawiona komunikacyjnej zdolności spełnienia aktu perswazji — jest ona w mniej lub bardziej formalny sposób po prostu wyłączona z dyskusji, na przykład traci autorytet w oczach audytorium lub w ogóle nie zostaje dopuszczona do głosu. W takim nieinferencyjnym ujęciu rozważana tu postać *ad hominem*, podobnie zresztą jak i negatywne *ex concessis*, byłaby pewną perswazyjną techniką, ale nie rodzajem argumentu, ponieważ na argument oprócz przesłanek składa się również konkluzja. Jeśli więc chcemy mówić o argumentacji *ad hominem*, to należy rozważyć możliwe konkluzje, którymi dałoby się uzupełnić schematy i przykłady, o których była mowa w poprzednim punkcie.

Oczywiście bezpośrednią konkluzją jest samo twierdzenie o niezgodności głoszonych poglądów i postępowania. Jeżeli przyjąć, że jedna z przesłanek zarzutu mówi o pewnej relacji między adresatem zarzutu a zdaniem, zaś druga o relacji między adresatem a działaniem, to można by nawet dopatrywać się tu sylogizmu, w którym rolę terminu średniego, ulegającego wyeliminowaniu we wniosku, pełniłoby odniesienie do adresata. Wtedy bezpośredni wniosek mówiłby właśnie coś o relacji między zdaniem a działaniem, a mianowicie stwierdzałby ich niezgodność, którą przy proponowanej tutaj interpretacji należałoby rozumieć w ten sposób, że normy werbalnie deklarowane i te stanowiące w myśl imperatywu kategorycznego podstawę działania wzajemnie się wykluczają. Dlatego też nie wyznaczają żadnego spójnego prawa moralnego, które mogłoby mieć powszechnie obowiązujący charakter. W języku Kanta można by powiedzieć, że wola adresata zarzutu pozostaje w konflikcie sama ze sobą lub że brak jej harmonii z powszechnym praktycznym rozumem. Atak na etos, jaki się tutaj odbywa, należałoby zatem uściślić jako próbę pozbawienia adresata jego prawodawczego potencjału, postulowanego wprost przez tzw. *Formułę Autonomiczności* (ang. *The Autonomy Formula*), postać imperatywu kategorycznego, która odwołuje się do „idei woli każdej istoty rozumnej, jako woli powszechnie prawodawczej" (*Uzasadnienie metafizyki moralności* 4:431). Konkluzja zarzutu podważałaby więc, w ten lub inny sposób, prawo do wypowiedzi o tym, jak być powinno.

Dalsze konsekwencje, jakie da się wywieść z zarzutu niezgodności, mogą dotyczyć zarówno samej osoby, w stosunku do której jest on skierowany, jej zachowania, jak i głoszonych przez nią poglądów. Aby rzecz przedstawić bardziej systematycznie, rozważymy trzy typy okoliczności wyjaśniających niezgodność między postępowaniem a deklarowanym poglądem, wyznaczające trzy poziomy ataku na etos, rozumiany jako zdolność prawodawcza wolnej woli. Po pierwsze atak może dotyczyć czyichś kompetencji logicznych. Ktoś może po prostu nie dostrzegać, że jego poglądy i działania się kłócą — czy to z powodu umysłowego ograniczenia, braku wyobraźni czy też funkcjonowania jakiegoś psychologicznego mechanizmu obronnego, czy wreszcie z braku należytej uwagi przy ocenie skutków swojego postępowania (przykładem tej ostatniej kategorii mogą być rozmaite nieekologiczne zachowania osób, które skądinąd deklarują przywiązanie do proekologicznych wartości). We wszystkich tych wypadkach mamy do czynienia z jakiegoś rodzaju brakiem rozumności. Może on być różnie oceniany, ale zawsze daje podstawę do podważenia potencjału prawodawczego jakiejś osoby, przynajmniej w odniesieniu do kwestii objętych zarzutem, jeśli nie również i w innych, bo bezrozumność w jednej sprawie łatwo jest ekstrapolować i przedstawić jako cechę osobowości. A przecież idea woli jako powszechnie prawodawczej dotyczy właśnie istot rozumnych.

Drugi możliwy poziom ataku na etos ujawnia się dopiero w relacji atakowanej osoby do innych istot rozumnych, z którymi ma ona współtworzyć „królestwo" czy też „państwo celów"[6], jak nazywa je Kant, i dotyczy jej kompetencji komunikacyjnych. Ktoś przecież może głosić lub choćby przystać, nawet pod przymusem, na jakiś pogląd, a działać w rzeczywistości w myśl wewnętrznie uznanej maksymy wykluczającej się z tym poglądem. Sama czynność też może być w pewnym sensie udawana, jeśli na przykład wykonuje się ją „na niby", „na aby, aby" lub „byle jak". Na pierwszy plan wysuwa się tu zatem problem szczerości i jej braku, czy też w ogóle manipulacji, która, co należy wyraźnie zaznaczyć, wcale nie zmusza nas automatycznie do formułowania osądów moralnych, bowiem w same definicje tych pojęć żadne kwestie etyczne nie są uwikłane (por. Tokarz, 2006; Selinger, 2005). Nie znaczy to oczywiście, że nieszczere zachowania nie mają etycznego potencjału. Owszem, mają, i to spory, jak przykładowo hipokryzja, ale nie na podstawie samego ich określenia[7]. Zresztą, już na pierwszym poziomie, który z pozoru wydaje się etycznie neutralny, kwestie moralne również mogą się pojawić, kiedy

6 W tłumaczeniu M. Wartenberga jest to „państwo celów".

7 W tej kwestii dosyć znacząco odbiegamy od poglądów samego Kanta, który każde kłamstwo, nawet to ratujące życie, uważał za moralnie naganne.

na przykład przez niefrasobliwość czy zaniedbanie ktoś nie zachowa należytej uwagi przy ocenie skutków swojego działania i doprowadzi do jakiegoś nieszczęścia. Podsumowując, na tak określonym drugim poziomie etos osoby, która dopuszcza się manipulacji, można zaatakować nie tyle z powodów *stricte* moralnych, co dlatego, że tak naprawdę nie wiadomo, co taka osoba myśli i jakimi normami kieruje się przy dokonywaniu wyborów.

Poziomem, na którym dokonuje się atak o charakterze moralnym, jest poziom trzeci, gdzie relacja komunikacyjna określająca poziom poprzedni zachodzi ze względu na pewną ideę czy też cel. Z punktu widzenia moralnej filozofii Kanta jest to — stanowiąca punkt wyjścia jego rozważań — idea dobrej woli istot rozumnych, warunkująca samą możliwość ustanowienia wspólnego „państwa celów", ku któremu — jako wolnym prawodawcom — każe nam zmierzać imperatyw kategoryczny. Z tego punktu widzenia zgodność czynu i stanowionej normy nakazuje kolejne jego sformułowanie (*Formuła Państwa Celów*, ang. *The Kingdom of Ends Formula*), które znajdujemy u Kanta (*Uzasadnienie metafizyki moralności* 4:439):

> Postępuj wedle maksymy członka, który nadaje prawa dla możliwego tylko państwa celów.

Z tego rodzaju brakiem postulowanej zgodności mamy do czynienia wtedy, gdy ktoś w pełni świadomie postępuje wbrew własnym zasadom. Dzieje się tak, kiedy nie przeciwstawia się własnym popędom, kiedy próbuje komuś zaszkodzić lub też kiedy, mniej lub bardziej otwarcie, występuje przeciw samej idei „państwa celów", by swoimi działaniami wprost przeciwdziałać jego ustanowieniu, przy czym te trzy możliwości się nie wykluczają. Pierwsza z nich świadczy o tym, że atakowana osoba pozwala na to, aby determinowało ją prawo naturalne, które jak „niebo gwiaździste" — ze znanej metafory Kanta — jest „ponad nią". Osoba, która daje się kierować swoim naturalnym popędom, sama pozbawia się w ten sposób statusu prawodawcy. Innymi słowy, jej „prawodawcą" jest natura. Jeśli nawet nie ma tu złej woli, to brakuje dobrej. Dlatego w dyskusji pomiędzy pełnoprawnymi prawodawcami głos takiej osoby się po prostu nie liczy. Podobną sytuacją jest konformizm, kiedy to determinującą rolę natury przejmuje otoczenie społeczne. Brak dobrej woli może się łączyć ze skłonnością do nieszczerości — na przykład, gdy ktoś stara się ukryć swoje własne przekonania, wbrew którym postępuje, głosząc przy tym normy, z którymi się w głębi ducha nie zgadza, choć w ich myśl postępuje. Druga możliwość tym się różni od pierwszej, że nakierowana jest z definicji na jakąś inną osobę. Jedno nie wyklucza drugiego, ale w tym przypadku chodzi nie tyle o brak woli, by postępować w myśl własnych zasad, lecz o samą intencję zaszkodzenia komuś. Dlatego motorem działania jest tu zła wola powodowana na przykład niechęcią, zawiścią, nienawiścią itp., a zło przyjmuje postać złośliwości. Obie możliwości podobne są jednak pod tym względem, że złe postępowanie wynika z pobudek o charakterze osobistym, emocjonalnym, które determinują nas w sposób psychologiczny, a więc też w oparciu o czynniki naturalne. Natomiast trzecia możliwość dotyczy czegoś, co należałoby nazwać złem metafizycznym lub złem w czystej postaci. Postępowanie tego rodzaju jest wymierzone w samą ideę „państwa celów" oraz towarzyszące jej idee godności i wolności istot rozumnych, sprawiając, że zło jest czynione niejako dla samego zła. Uosobieniem takiego postępowania, rzeczywistym czy też tylko wyobrażonym, wydaje się postać Szatana, który w przeciwieństwie do Boga, mającego nas wspierać w dążności do uczestnictwa w „państwie celów", czyli w raju, próbuje nam w tym przeszkodzić i sprawić, byśmy znaleźli się w symbolizującym przeciwieństwo „państwa celów" piekle.

Jak widać, możliwych powodów wyjaśniających konflikt zachodzący pomiędzy głoszonymi poglądami a postępowaniem jest wiele, ale każdy z nich wskazuje na pewnego rodzaju niekompetencję, która może być trojakiego rodzaju. Może być to niekompetencja intelektualna, komunikacyjna lub moralna. Jeśli więc ostateczna konkluzja ma na którąś z nich wskazywać, to nasze rozumowanie będzie polegało na wnioskowaniu do najlepszego z wyjaśnień, a więc będzie miało charakter abdukcyjny. Ponieważ powody te wcale nie muszą się wykluczać, to owo najlepsze wyjaśnienie może być ich pewną konfiguracją. W grę wchodzą przy tym niełatwe do wykrycia okoliczności, jak ludzkie intencje i rozmaite inne uwarunkowania psychiczne. Dlatego ostateczny osąd niełatwo jest wydać, jeśli nie przyjmie się po drodze rozmaitych domniemań lub uproszczeń. Łatwo natomiast o stronniczość, nadinterpretację, nierzetelność czy pomyłkę. To przed nimi mają nas zabezpieczać odpowiednie dowodowe procedury w procesie prawnym, a na co dzień — nawyk i kultura krytycznego myślenia.

Do tej pory koncentrowaliśmy się na możliwych konkluzjach dotyczących atakowanej osoby lub jej postępowania, ale oczywiście ostatecznym celem ataku bywa też sam głoszony przez nią pogląd, który ma się z jej postępowaniem kłócić. Stąd w proponowanych schematach Walton (1998, s. 251 i nast.) oraz Walton, Reed i Macagno (2008, s. 148 i nast.) podają dwie konkluzje. Jedna z nich mówi, że zaatakowana osoba jest moralnie zła[8], zaś druga, że jej argumentacji, której konkluzję

8 Zgodnie z poziomami ataku na etos, które wyróżniliśmy, należałoby uściślić: moralnie zła bądź logicznie lub komunikacyjnie niekompetentna.

stanowi wskazywany, niezgodny z postępowaniem pogląd, nie powinno się zaakceptować. Zauważmy przy tym, że jeśli potępiamy uczynek, to zarówno sam pogląd, jak i ewentualne wspierające go argumenty mogą (choć nie muszą) być nadal słuszne. Mogą być nawet zbieżne, a wręcz identyczne z naszymi własnymi poglądami. W tej sytuacji celem ataku nie jest już to, jak można by wnosić ze schematów Waltona, aby czyjeś poglądy z powodu ich niezgodności z postępowaniem odrzucić, ale by raczej zachować szczególną wstrzemięźliwość, ostrożność i krytycyzm przy ich całościowej ocenie, a nade wszystko nie traktować osoby atakowanej jako autorytetu stanowiącego źródło ich uprawomocnienia. W tej sytuacji celem ataku jest więc już tylko czyjś etos, a nie sam wskazywany pogląd. Dodajmy, że jeśli faktycznie akceptujemy pogląd, to niezgodne z nim zachowanie powinniśmy potępić bezwzględnie. I analogicznie, jeśli za słuszne, a więc zbieżne z naszymi normami i oczekiwaniami, uznajemy postępowanie, to powinniśmy odrzucić niezgodny pogląd wraz ze wspierającą go argumentacją. Stąd jako konkluzję argumentów typu *tu quoque* podaje się między innymi zdanie stwierdzające, że być może krytykowane przez adresata zarzutu zachowanie wcale nie jest takie złe, jak chciałby on to przedstawić (Szymanek, Wieczorek, Wójcik, 2003, s. 78). Analogiczne argumenty *neque tu* miałyby konkluzję o postaci: *Być może to, co tak chwalisz/zalecasz/nakazujesz/czego bronisz, wcale nie jest takie dobre*.

Zakończenie

Ponieważ możliwość bezpośredniego wyprowadzenia na dedukcyjnej, czysto logicznej drodze jakiegoś bardziej stanowczego wniosku na temat wiarygodności głoszonego poglądu czy też słuszności postępowania jest jednak dosyć ograniczona i, co ważne, zakłada korzystanie z przekonań ugruntowanych już wcześniej w inny sposób, który wciąż może być przedmiotem sporu, to perswazyjnie bardziej efektywna wydaje się strategia retoryczna, polegająca na podważaniu wiarygodności poglądów za pośrednictwem ataku na etos. Dlatego, jeśli celem ataku ma być właśnie pogląd danej osoby, to dwie konkluzje ze schematów proponowanych przez Waltona, które określiliśmy wyżej jako alternatywne, mogą — a może i powinny — być interpretowane jako konkluzja pośrednia, mówiąca o „niemoralności" tej osoby, i wspierana przez nią konkluzja główna, stwierdzająca niewiarygodność jej poglądu czy też całej argumentacji (por. Walton, Reed i Macagno, 2008, s. 354 i nast.). Ponieważ jednak często zgadzamy się z poglądem, a nie z postępowaniem atakowanej osoby, ową konkluzję pośrednią wykorzystujemy do podważenia wiarygodności poglądów innych niż ten wskazany w zarzucie. Zabiegi takie, w mniej lub bardziej uświadomiony sposób, zmierzają do rozstrzygnięcia dyskusji poprzez wykluczenie z niej jednej ze stron i z góry pominięcie jej tez i argumentów. Łatwo przy tym o płytkie analogie, pośpieszne uogólnienia, dlatego takie ekstrapolacje zawsze powinny być badane w szczególnie skrupulatny i krytyczny sposób.

W skrajnej postaci atak na etos może stać się wysublimowanym narzędziem regulowania stosunków społecznych, prowadzącym do częściowego lub całkowitego wykluczania ze wspólnoty istot rozumnych osób nie tylko w roli prawodawców, ale w ogóle jako podmiotów prawa. Wykluczenie może być umowne, symboliczne i ujawniać się tylko w tym, co o kimś się mówi i jak się go traktuje. Może też mieć bardziej formalny charakter, jak na przykład ubezwłasnowolnienie lub pozbawienie praw wyborczych. Może też być wykluczeniem fizycznym, izolacją od innych, jak ograniczenie lub pozbawienie wolności, wypędzenie czy, w skrajnym przypadku, uśmiercenie. Takie wykluczanie może stanowić karę, gdy czyn jest zabroniony, ale może też mieć charakter prewencyjny, na przykład ze względu na czyjeś intelektualne ograniczenia bądź chorobę psychiczną. Wykluczanie może też być skutkiem ograniczeń poznawczych i komunikacyjnych, które po obu stronach utrudniają wzajemne rozpoznawanie się jako istot rozumnych. Stąd na przykład u kolonizatorów postrzeganie tubylców jako „dzikich", którym nie przysługuje prawo do własności ani prawo do wolności i których można uczynić niewolnikami, ponieważ nie są w stanie zrozumieć moralnych maksym i przykazań, którymi kierują się kolonizatorzy, a jeśli nawet wydaje się, że już te normy jakoś deklaratywnie zaakceptują, to i tak nie potrafią zgodnie z nimi postępować. Ten rodzaj wykluczenia bywa motywowany ideologicznie, obejmując całe grupy społeczne, którym z jakiegoś powodu odmawia się człowieczeństwa. Niebezpieczeństwo, jakie się tu rodzi, polega na tym, że uniwersalne maksymy, wedle których mamy działać, formalnie są ograniczone do „celów samych w sobie", to jest istot rozpoznanych i uznanych jako zdolne do bycia podmiotami działań moralnych. Jak głosi *Formuła Człowieczeństwa* (ang. *The Humanity Formula*), kolejne z Kantowskich sformułowań imperatywu kategorycznego (*Uzasadnienie metafizyki moralności* 4:429):

> Postępuj tak, byś człowieczeństwa tak w twej osobie, jako też w osobie każdego innego używał zawsze zarazem jako celu, nigdy tylko jako środka.

Z tego właśnie powodu powstaje pokusa instrumentalnego traktowania istot wykluczonych z „człowieczeństwa" i usprawiedliwiania w ten sposób działań, które w stosunku do innych, uznanych podmiotów moralnych zakwalifikowalibyśmy jako niedopuszczalne. Gdyby więc atak na etos zaprowadził nas aż tak daleko, może powinniśmy zadać sobie pytanie, czy nie jesteśmy jednak zobowiązani, a jeśli tak, to w jakim zakresie, stosować nasze normy również do istot, których wprawdzie nie rozpoznajemy (a być może tylko nie potrafimy rozpoznać) jako podmioty działań moralnych, mimo że widzimy w nich pewne, choćby częściowe podobieństwo do nas, zwłaszcza pod względem takich cech, jak z jednej strony zdolność do odczuwania bólu i cierpienia, która przecież na te normy wpływa, a z drugiej rozumność, która jest warunkiem koniecznym naszego prawodawczego potencjału. W ten sposób moglibyśmy zabezpieczyć naszą etykę przed zarzutem o antropocentryzm.

Bibliografia

Budzynska, K., Witek, M. (2014). Non-Inferential Aspects of *Ad Hominem* and *Ad Baculum*. *Argumentation* 28, s. 301–315.

Ezorsky, G. (1966). Ad Hominem Morality. *The Journal of Philosophy* 63, s. 120–125.

Hare, R.M. (1963). *Freedom and Reason*. New York: Oxford University Press.

Johnson, R., Cureton, A. (2022). *Kant's Moral Philosophy*. W: *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2022 Edition), red. Edward N. Zalta, U. Nodelman, Stanford: Metaphysics Research Lab, Stanford University, https://plato.stanford.edu/archives/fall2022/entries/kant-moral/

Kant, I. (2001). *Uzasadnienie metafizyki moralności*. Przeł. M. Wartenberg. Kęty: Wydawnictwo ANTYK.

Schopenhauer, A. (1973). *Erystyka, czyli sztuka prowadzenia sporów*. Kraków: Wydawnictwo Literackie.

Selinger, M. (2005). *Dwa pojęcia prawdy w świetle logiki i erystyki*. W: *Aspekty kompetencji komunikacyjnej*, *Via Communicandi*, t. 2, red. B. Sierocka, Wrocław: Atut, s. 148–158.

Szymanek, K., Wieczorek, K.A., Wójcik, A. (2003). *Sztuka argumentacji. Ćwiczenia w badaniu argumentów*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Tokarz, M. (2006). *Argumentacja, perswazja, manipulacja*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.

Walton, D. (1998). *Ad Hominem Arguments*, Tuscaloosa: University of Alabama Press.

Walton, D., Reed, C., Macagno, F. (2008). *Argumentation Schemes*. New York: Cambridge University Press.

Ziembiński, Z. (1994). *Logika praktyczna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Ziobrowski, J. (2013). *Warunkowe obowiązywanie norm moralnych*. W: *Etyka u schyłku drugiego tysiąclecia*, red. J. Ziobrowski. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, s. 318–341.

Ad hominem argumentation and Kant's categorical imperative

Abstract: The paper takes into account this type of *ad hominem* argumentation, in which someone is accused of incompatibility of proclaimed views with their behavior. In addition to presenting the ways of formulating the premises of such an argumentation, our goal is to analyze various possible conclusions, especially those of the nature of moral judgments. Assuming the legislative character of free will, we adopt Kant's categorical imperative as a basis for consideration. In the result, we distinguish three types of attack on the rhetorical ethos of an opponent: (*I*) on their logical-cognitive abilities, (*II*) intentions and communicative competence, and (*III*) volitional-moral characteristics.

Keywords: *ad hominem*, ethical argumentation, ethos, *ex concessis*, the categorical imperative

Eugeniusz Wojciechowski

Teoria mnogości w rachunku nazw

Abstrakt: Celem artykułu jest próba zinterpretowania pewnego fragmentu teorii mnogości, w ujęciu Zermela-Fraenkla, na gruncie ontologii elementarnej ze schematem predykacji Fregego, wzbogaconej o pewne aksjomaty specyficzne.

Teoriomnogościowa relacja *bycia elementem* i predykat *zbioru* są tu zdefiniowane. Pojęcia *pary nieuporządkowanej* oraz *pary uporządkowanej* w formie funktorów są tu również wprowadzone definicyjnie.

1. Preliminaria

Ontologia elementarna. Aksjomatem specyficznym ontologii elementarnej (**OE**) jest:

A0 $x\varepsilon y \leftrightarrow \Sigma z(z\varepsilon x) \wedge \Pi zu(z\varepsilon x \wedge u\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon u) \wedge \Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y)$

Do reguł wtórnych, będących bezpośrednimi konsekwencjami aksjomatu A0, należą:

R1 $x\varepsilon y \,/\, x\varepsilon x$

R2 $x\varepsilon y \wedge y\varepsilon z \,/\, x\varepsilon z$

R3 $x\varepsilon y \wedge y\varepsilon z \,/\, y\varepsilon x$

Stałe nazwowe *przedmiotu* i *przedmiotu sprzecznego* są zdefiniowane następująco:

DV $x\varepsilon \mathrm{V} \leftrightarrow x\varepsilon x$ *x jest przedmiotem*

DΛ $x\varepsilon \Lambda \leftrightarrow x\varepsilon x \wedge \sim x\varepsilon x$ *x jest przedmiotem-sprzecznym*

Definicyjnie wprowadzone są również funktory istnienia, jedyności, bycia przedmiotem, słabej inkluzji, mocnej inkluzji, identyczności zakresowej i identyczności:

D*ex* $ex(x) \leftrightarrow \Sigma z(z\varepsilon x)$ *x istnieje*

D*sol* $sol(x) \leftrightarrow \Pi zu(z\varepsilon x \wedge u\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon u)$ *co najwyżej-jeden-przedmiot-jest x*

D*ob* $ob(x) \leftrightarrow x\varepsilon x$ *jest-przedmiotem x*

D⊂ $x{\subset}y \leftrightarrow \Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y)$ *x zawiera-się-w y*

D○ $x{\bigcirc}y \leftrightarrow \Pi z(z\varepsilon x \text{ ø } z\varepsilon y)$ *x jest-zakresowo-identyczne-z y*

D∍ $x{\ni}y \leftrightarrow x\varepsilon y{\wedge}y\varepsilon x$ *x jest-identyczne-z y*

Przyjmiemy też definicje funktorów parametrycznych *bycia y-kiem* i *spełniania*:

D<> $\varepsilon{<}y{>}(x) \leftrightarrow x\varepsilon y$

D*stsf* $x\varepsilon stsf(\varphi) \leftrightarrow x\varepsilon x \wedge \varphi(x)$

System ontologii elementarnej można ufundować na rachunku predykatów bez identyczności[1].

Ontologia elementarna ze schematem predykacji Fregego. System ontologii elementarnej jest tu rozszerzony o funktor *sub* — o kategorii — *n/n*.

Wyrażenie elementarne „$x\varepsilon sub(y)$” jest tu czytane: „*x jest podporządkowane y*”.

Aksjomaty specyficzne tego systemu (**OE**^{sub}) mają postać (Wojciechowski, 2019a, s. 9–24):

A1 $x\varepsilon sub(y) \rightarrow sub(x){\subset}sub(y)$

A2 $x\varepsilon sub(y) \rightarrow {\sim}y{\subset}sub(x)$

A3 $x\varepsilon sub(y) \rightarrow y\varepsilon y$

A4 $sub(x){\bigcirc}sub(y) \div x{\bigcirc}y$

Definicyjnie jest tu wprowadzany funktor *pojęcia*:

D*C* $x\varepsilon Cy \leftrightarrow x\varepsilon x \wedge \Pi z(z\varepsilon y \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$ *x jest pojęciem y*

Do kluczowych tez z funktorami *sub* i *C* należą[2]:

$x\varepsilon sub(Cy) \leftrightarrow x\varepsilon y$ *Jeżeli x jest podporządkowane pojęciu y, to x jest y*

oraz

$Cx\varepsilon sub(Cy) \rightarrow x{\subset}y$ *Jeżeli pojęcie x jest podporządkowane pojęciu y, to x zawiera się w y*

---

1 Oryginalny system ontologii był ufundowany na *prototetyce* — rachunku zdań z kwantyfikatorami. Jako wstęp do ontologii elementarnej można polecić pracę (Słupecki, 1955).

2 Zob. niżej tezy T2.5 i T2.6.

2. Idee wyjściowe

Funktor *C*, obecny w definicji D*C* można interpretować inaczej — jako *klasę* (*zbiór*) w znaczeniu dystrybutywnym[3]:

D*C* $x\varepsilon Cy \leftrightarrow x\varepsilon x\wedge\Pi z(z\varepsilon y \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$ *x jest klasą y*

3. Funktor abstrakcji

Za bazową konstrukcją przyjmiemy tu ontologię elementarną ze schematem predykacji Fregego ($\mathbf{OE}^{sub}$).

Definicyjnie wprowadzimy funktor *abstrakcji*[4]:

D*A* $x\varepsilon A\varphi \leftrightarrow x\varepsilon x\wedge\Pi z(z\varepsilon stsf(\varphi) \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$

Prostymi konsekwencjami aksjomatów A1-A4 i D*A* są[5]:

T1.1	$x\varepsilon sub(y)\wedge y\varepsilon sub(z) \rightarrow x\varepsilon sub(z)$	
T1.2	$\sim x\varepsilon sub(x)$	
T1.3	$\sim x\varepsilon Cx$	[D*C*,R1,T1.2]
T1.4	$x\varepsilon Cy\wedge z\varepsilon Cy \rightarrow x\varepsilon z$	[D*C*,D ,A4,R1,Dd]
T1.5	$sol(Cx)$	[T1.4,D*sol*]
T2.1	$Cx\varepsilon Cy \leftrightarrow Cx\varepsilon Cx\wedge\Pi z(z\varepsilon y \leftrightarrow z\varepsilon sub(Cx))$	[D*C*]
T2.2	$Cx\varepsilon Cx \leftrightarrow ex(Cx)\wedge\Pi z(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon sub(Cx))$	[T1.5,T2.1,**OE**]
T2.3	$\sim Cx\varepsilon x$	[R1,T2.2,T1.2]
T2.4	$Cx\varepsilon Cy \rightarrow Cx=Cy$	[D*ex*,T2.2,**OE**]
T2.5	$x\varepsilon sub(Cy) \rightarrow x\varepsilon y$	[A3,T2.2]
T2.6	$Cx\varepsilon sub(Cy) \rightarrow x\mathrm{d}y$	[R1,T2.2,T1.1,T2.5,Dd]
T2.7	$x\varepsilon x\wedge Cx\varepsilon sub(Cy) \rightarrow x\varepsilon sub(Cy)$	[R1,T2.2,T1.1]
T2.8	$x\varepsilon Cy \rightarrow \sim x\varepsilon y$	[D*C*,T1.2]
T2.9	$Cx\varepsilon Cy \rightarrow x\ y$	[T2.1,T2.4,A4,**OE**]

Do tez z funktorem abstrakcji należą:

T3.1	$x\varepsilon A\varphi \leftrightarrow x\varepsilon Cstsf(\varphi)$	[D*A*,D*C*]

Jeżeli lewą stronę tezy T3.1 zapisać w konwencji klamrowej, charakterystycznej dla teorii mnogości, to teza ta miałaby postać:

$x\varepsilon\{z: \varphi(z)\} \leftrightarrow x\varepsilon Cstsf(\varphi)$[6]

---

3 Taką interpretację tego terminu zaproponowałem w (Wojciechowski, 2019a, s. 59). Terminy *zbiór* i *klasa* (w znaczeniu dystrybutywnym) traktujemy tu jak synonimy.

4 Jest on odpowiednikiem teoriomnogościowego *operatora abstrakcji*.

5 Odwoływanie się w dowodach do podstawowych tez ontologii elementarnej będzie sygnalizowane krótko przez **OE**. W dowodach wyrażenia „z", „zd", „zdn" i „sprz." są odpowiednio skrótami wyrażeń: „założenie", „założenie dodatkowe", „założenie dowodu nie wprost" i „sprzeczność".

6 Taką definicję funktora abstrakcji proponowałem w (Wojciechowski, 2019a, s. 95–103). Inspiracją do przedstawionych tam badań była praca (Osawa, Waragai, 1985).

T3.2 $x\varepsilon A\varphi \wedge y\varepsilon A\varphi \rightarrow x\varepsilon y$

Dem.

(1)	$x\varepsilon A\varphi$	[z]
(2)	$y\varepsilon A\varphi$	[z]
(3)	$\Pi z(z\varepsilon stsf(\varphi) \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$	[1,DA]
(4)	$\Pi z(z\varepsilon stsf(\varphi) \leftrightarrow z\varepsilon sub(y))$	[2,DA]
(5)	$\Pi z(z\varepsilon sub(x) \leftrightarrow z\varepsilon sub(y))$	[3,4]
(6)	$sub(x)\bigcirc sub(y)$	[5,D$\bigcirc$]
(7)	$x\bigcirc y$	[6,A4]
(8)	$x\varepsilon x$	[1,DA]
(9)	$x\varepsilon y$	[7,8,**OE**]

T3.3 $sol(A\varphi)$ [T3.1,Dsol]

T3.4 $A\varphi\varepsilon A\psi \; ø \; A\varphi\varepsilon A\varphi \square \Pi z(z\varepsilon stsf(\psi) \; ø \; z\varepsilon sub(A\varphi))$ [DA]

T3.5 $A\varphi\varepsilon A\varphi \; ø \; ex(A\varphi)\square \Pi z(z\varepsilon stsf(\varphi) \; ø \; z\varepsilon sub(A\varphi))$ [T3.3,T3.3,**OE**]

T3.6 $x\varepsilon sub(A\varphi) \div \varphi(x)$

Dem.

(1)	$x\varepsilon sub(A\varphi)$	[z]
(2)	$A\varphi\varepsilon A\varphi$	[1,A3]
(3)	$\Pi z(z\varepsilon stsf(\varphi) \leftrightarrow z\varepsilon sub(A\varphi))$	[2,T3.5]
(4)	$x\varepsilon stsf(\varphi)$	[1,3]
(5)	$\varphi(x)$	[4,D$stsf$]

T3.7 $A\varphi\varepsilon sub(A\psi) \rightarrow stsf(\varphi)\mathrm{d}stsf(\psi)$

Dem.

(1)	$A\varphi\varepsilon sub(A\psi)$	[z]
(2a)	$\Pi x.x\varepsilon stsf(\varphi)$	[zd1]
(2b)	$A\varphi\varepsilon A\varphi$	[1×R1]
(2c)	$\Pi z(z\varepsilon stsf(\varphi) \rightarrow z\varepsilon sub(A\varphi))$	[2b,T3.5]
(2d)	$x\varepsilon sub(A\varphi)$	[2a,2c]
(2e)	$x\varepsilon sub(A\psi)$	[1,2d,T1.1]
(2f)	$x\varepsilon x$	[2a×R1]
(2g)	$\psi(x)$	[2e,T3.6]
(2h)	$x\varepsilon stsf(\psi)$	[2f,2g,D$stsf$]
(2)	$\Pi x(x\varepsilon stsf(\varphi) \rightarrow x\varepsilon sub(\psi))$	[2a $\rightarrow$ 2h]
(3)	$stsf(\varphi)\subset stsf(\psi)$	[2,D$\subset$]

Tezy T3.6 i T3.7 są odpowiednikami tez T2.5 i T2.6

T3.8 $A\varphi\varepsilon sub(A\psi) \rightarrow stsf(\varphi)\subset stsf(\psi)$

Dem.

(1)	$A\varphi\varepsilon sub(A\psi)$	[z]

(2) $Cstsf(\varphi)\varepsilon sub(Cstsf(\psi))$ [1,T3.1]
(3) $Cstsf(\varphi)\varepsilon sub(Cstsf(\psi)) \rightarrow stsf(\varphi)\subset stsf(\psi)$ [T2.6]
(4) $stsf(\varphi)\subset stsf(\psi)$ [2,3×MP]

T3.9a$x\varepsilon A\varepsilon<y> \rightarrow x\varepsilon Cy$

Dem.

(1) $x\varepsilon A\varepsilon<y>$ [z]
(2) $\Pi z(z\varepsilon stsf(\varepsilon<y>)$ ø $z\varepsilon sub(x))$ [1,DA]
(3) $\Pi z(z\varepsilon y \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$ [2,D$stsf$,D<>,**OE**]
(4) $x\varepsilon x$ [1,DA]
(5) $x\varepsilon Cy$ [3,4,DC]

T3.9b $x\varepsilon Cy \rightarrow x\varepsilon A\varepsilon<y>$

Dem.

(1) $x\varepsilon Cy$ [z]
(2) $x\varepsilon x$ [1,DC]
(3a) $\Pi z.z\varepsilon stsf(\varepsilon<y>)$ [zd1]
(3b) $z\varepsilon y$ [3a,D$stsf$,D<>,**OE**]
(3c) $z\varepsilon sub(x)$ [1,DC,3b]
(3) $\Pi z(z\varepsilon stsf(\varepsilon<y>) \rightarrow z\varepsilon sub(x))$ [3a → 3c]
(4a) $\Pi z.z\varepsilon sub(x)$ [zd2]
(4b) $z\varepsilon y$ [4a,1,DC]
(4c) $z\varepsilon z$ [4bHR1]
(4d) $\varepsilon<y>(z)$ [4b,D<>]
(4e) $z\varepsilon stsf(\varepsilon<y>)$ [4c,4d,D$stsf$]
(4) $\Pi z(z\varepsilon sub(x)) \rightarrow z\varepsilon stsf(\varepsilon<y>))$ [4a ÷ 4e]
(5) $\Pi z(z\varepsilon stsf(\varepsilon<y>) \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$ [3,4]
(6) $x\varepsilon A\varepsilon<y>$ [2,5,DA]

T3.9 $x\varepsilon A\varepsilon<y> \leftrightarrow x\varepsilon Cy$ [T3.9a,T3.9b]

4. Ontologiczny fragment teorii mnogości

***System* OEM**. Oznaczmy przez **OEM** wzbogacenie ontologii elementarnej ze schematem predykacji Fregego o dwa aksjomaty specyficzne:

B1 $x\varepsilon y \rightarrow x\varepsilon sub(Cy)$
B2 $x\varepsilon sub(y) \div \Sigma z(y\varepsilon Cz)$

Tak więc, **OEM**=**OE**^{sub}[B1,B2]=**OE**[A1,A2,A3,A4,B1,B2].

Do tez systemu **OEM** należą:

T4.1 $x\varepsilon y \leftrightarrow x\varepsilon sub(Cy)$ [T2.5,B1]

T4.2 $a\circ b \rightarrow Ca\circ Cb$ [DC,D○,D⊂]

T4.3 $\Sigma a\Pi x(x\varepsilon a \leftrightarrow x\varepsilon x\wedge\varphi(x))$ gdzie φ jest formułą systemu, w której *a* nie występuje jako zmienna wolna

Dem.

(1a)	$\Sigma a\Pi x.x\varepsilon a$	[zd1]
(1b)	$x\varepsilon x$	[1a×R1]
(1c)	$\varepsilon<a>(x)$	[1a,Dε<>]
(1d)	$x\varepsilon x\wedge\varepsilon<a>(x)$	[1b,1c]
(1e)	$x\varepsilon x\wedge\varphi(x)$	[1d, ε<*a*> jest φ-formułą, spełniającą warunek T4.3]
(1)	$\Sigma a\Pi x(x\varepsilon a \rightarrow x\varepsilon x \wedge \varphi(x))$	[1b → 1e]
(2a)	$\Pi x.x\varepsilon x\wedge\varphi(x)$	[zd2]
(2b)	$x\varepsilon stsf(\varphi)$	[2a,D*stsf*]
(2c)	$\Sigma a(x\varepsilon a)$	[2b]
(2)	$\Pi x(x\varepsilon x\wedge\varphi(x) \rightarrow \Sigma a(x\varepsilon a))$	[2a → 2c]
(3)	$\Sigma a\Pi x(x\varepsilon x\wedge\varphi(x) \rightarrow x\varepsilon a)$	[2]
(4)	$\Sigma a\Pi x(x\varepsilon a$ ø $x\varepsilon x\wedge\varphi(x))$	[1,3]

Zdefiniujemy pojęcie *zbioru pustego* i *klasy uniwersalnej*:

D∅ $x\varepsilon\emptyset \leftrightarrow x\varepsilon C\Lambda$ *x jest zbiorem-pustym*

DU $x\varepsilon \mathrm{U} \leftrightarrow x\varepsilon C\mathrm{V}$ *x jest klasą uniwersalną*

Przyjmiemy definicję funktora *bycia zbiorem*:

DZ $Z(x) \leftrightarrow \Sigma a(x\varepsilon Ca)$ *x jest-zbiorem*

Teoriomnogościowy funktor *bycia elementem* (∈) i *zawierania się klas* zdefiniujemy następująco (Wojciechowski, 2019c, s. 101):

D∈ $x\in y\leftrightarrow x\varepsilon sub(y)\wedge\Sigma a(y\varepsilon Ca)$ *x należy-do y*

D⊂ $x\subset y \leftrightarrow \Pi z(z\in x$ 6 $z\in y)$ *x zawiera-się-w y*

Do tez z tymi funktorami należą:

T4.4 $\sim x\varepsilon C\mathrm{V}$

Dem.

(1)	$x\varepsilon C\mathrm{V}$	[zdn]
(2)	$x\varepsilon x\wedge\Pi z(z\varepsilon\mathrm{V} \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$	[1,DC]
(3)	$x\varepsilon\mathrm{V}$	[2,DV]
(4)	$x\varepsilon sub(x)$	[2,3]
(5)	$\sim x\varepsilon sub(x)$	[T1.2]
	sprz.	[4,5]

T4.5 $x\varepsilon C\Lambda \rightarrow \sim ex(sub(x))$

Dem.

(1)	$x\varepsilon C\Lambda$	[z]
(2)	$\Pi z(z\varepsilon\Lambda \leftrightarrow z\varepsilon sub(x))$	[1,DC]
(3)	$\Pi z.\sim z\varepsilon\Lambda \leftrightarrow -z\varepsilon sub(x)$	[2]
(4)	$\sim z\varepsilon\Lambda$	[DΛ]
(5)	$\Pi z(\sim z\varepsilon sub(x))$	[3,4]
(6)	$\sim\Sigma z(z\varepsilon sub(x))$	[5]
(7)	$\sim ex(sub(x))$	[6,Dex]

Zgodnie z T4.4 klasa przedmiotów nie istnieje, choć nazwa *przedmiot* — przynajmniej w zastosowaniach logiki tego typu — nie jest pusta. Z kolei treść tezy T4.5 sprowadza się do tego, że klasa przedmiotów sprzecznych nie posiada żadnego podporządkowanego jej przedmiotu.

T4.6 $\sim x\in\emptyset$

Dem.

(1)	$x\in\emptyset$	[zdn]
(2)	$x\varepsilon sub(\emptyset)$	[1,D∈]
(3)	$\emptyset\varepsilon\emptyset$	[2,A3]
(4)	$\emptyset\varepsilon C\Lambda$	[3,D∅]
(5)	$\Pi z(z\varepsilon\Lambda \leftrightarrow z\varepsilon sub(\emptyset))$	[4,DC]
(6)	$x\varepsilon\Lambda$	[2,5]
(7)	$\sim x\varepsilon\Lambda$	[DΛ]
sprz.		[6,7]

T4.7 $\sim x\in x$

Dem.

(1)	$x\in x$	[zdn]
(2)	$x\varepsilon sub(x)$	[1,D∈]
(3)	$\sim x\varepsilon sub(x)$	[T1.2]
	sprz.	[2,3]

T4.8 $\emptyset\subset x$ [T4.6,D⊆]

T4.9 $x\subset$U

Dem.

(1)	$x\subset$V	[D⊂,DV,**OE**]
(2a)	$\Pi z.z\in x$	[zd1]
(2b)	$z\varepsilon sub(x)$	[2a,D∈]
(2c)	$\Sigma a.x\varepsilon Ca$	[2b,B1]
(2d)	$a\subset$V	[**OE**]
(2e)	$sub(Ca)\subset sub(C$V$)$	[2d,TT4.1]
(2f)	$x=Ca$	[2c,T1.5,**OE**]

(2g)	$sub(x)\subset sub(CV)$	[2e,2f]
(2h)	$z\varepsilon sub(CV)$	[2b,2g,D⊂]
(2i)	$U\circ CV$	[DU,D○]
(2j)	$CV\varepsilon CV$	[2h,A3]
(2k)	$U=CV$	[2i,2j,**OE**]
(2l)	$z\varepsilon sub(U)$	[2h,2k]
(2m)	$z\in U$	[2l,D∈]
(2)	$\Pi z(z\in x \rightarrow z\in U)$	[2a → 2m]
(3)	$x\subset U$	[2,D⊆]

Do kolejnych konsekwencji tych definicji należą:

T5.1 $x\in y \leftrightarrow x\varepsilon sub(y)$ [D∈,B2]

T5.2 $x\in y \rightarrow Z(y)$ [D∈,D*Z*]

T5.3 $x\in Cy \leftrightarrow x\varepsilon y$

Dem.

(1a)	$x\in Cy$	[zd1]
(1b)	$x\varepsilon sub(Cy)$	[1a,T5.1]
(1c)	$x\varepsilon y$	[1b,T2.5]
(1)	$x\in Cy \rightarrow x\varepsilon y$	[1a → 1c]
(2a)	$x\varepsilon y$	[zd2]
(2b)	$x\varepsilon sub(Cy)$	[2a,B1]
(2c)	$x\in Cy$	[2b,T5.1]
(2)	$x\varepsilon y \rightarrow x\in Cy$	[2a → 2c]
(3)	$x\in Cy \leftrightarrow x\varepsilon y$	[1,2]

T5.4a $\mathrm{x\subset y \rightarrow sub(Cx)\square sub(Cy)}$

Dem.

(1)	$x\subset y$	[z]
(2a)	$\Pi z.z\varepsilon sub(Cx)$	[zd1]
(2b)	$z\varepsilon x$	[2a,T2.5]
(2c)	$z\varepsilon y$	[1,2b,D⊂]
(2d)	$z\varepsilon sub(Cy)$	[2c,B1]
(2)	$\Pi z(z\varepsilon sub(Cx) \rightarrow z\varepsilon sub(Cy))$	[2a → 2d]
(3)	$sub(Cx)\subset sub(Cy)$	[2,d⊂]

T5.4b $sub(Cx)\subset sub(Cy) \rightarrow x\subset y$

Dem.

(1)	$sub(Cx)\subset sub(Cy)$	[z]
(2a)	$\Pi z.z\varepsilon x$	[zd1]
(2b)	$z\varepsilon sub(Cx)$	[2a,B1]
(2c)	$z\varepsilon sub(Cy)$	[1,2b,D⊂]
(2d)	$z\varepsilon y$	[2c,T2.5]

(1)	$\Pi z(z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y)$	[2a → 2d]
(2)	$x\subset y$	[2,D⊂]

T5.4 $x\subset y \leftrightarrow sub(Cx)\subset sub(Cy)$ [T5.4a,T5.4b]

T5.5a $sub(x)\subset sub(y) \rightarrow \Pi z(z\in x \rightarrow z\in y)$

Dem.

(1)	$sub(x)\subset sub(y)$	[z]
(2a)	$\Pi z.z\in x$	[zd1]
(2b)	$z\varepsilon sub(x)$	[2a,D∈]
(2c)	$z\varepsilon sub(y)$	[1,2b,D⊂]
(2d)	$z\in y$	[2c,T5.1]
(2)	$\Pi z(z\in x \rightarrow z\in y)$	[2a → 2d]

T5.5b $\Pi z(z\in x \rightarrow z\in y) \rightarrow sub(x)\subset sub(y)$

Dem.

(1)	$\Pi z(z\in x \rightarrow z\in y)$	[z]
(2a)	$\Pi z.z\varepsilon sub(x)$	[zd1]
(2b)	$z\in x$	[2a,T5.1]
(2c)	$z\in y$	[1,2c]
(2d)	$z\varepsilon sub(y)$	[2c,D∈]
(2)	$\Pi z(z\varepsilon sub(x) \rightarrow z\varepsilon sub(y))$	[2a → 2d]
(3)	$sub(x)\subset sub(y)$	[2,D⊂]

T5.5 $sub(x)\subset sub(y) \leftrightarrow \Pi z(z\in x \rightarrow z\in y)$ [T5.5a,T5.5b]

T5.6a $x\varepsilon Ca\wedge sol(a) \rightarrow sol(sub(x))$

Dem.

(1)	$x\varepsilon Ca$	[z]
(2)	$sol(a)$	[z]
(3)	$\sim sol(sub(x))$	[zdn]
(4)	$\Sigma zu.z\varepsilon sub(x)\wedge u\varepsilon sub(x)\vee\sim z\varepsilon u$	[3,D*sol*]
(5)	$x=Ca$	[1,T1.5,**OE**]
(6)	$z\varepsilon sub(Ca)\wedge u\varepsilon sub(Ca)$	[4,5]
(7)	$z\varepsilon a\wedge u\varepsilon a\vee\text{-}z\varepsilon u$	[6,T2.5,4]
(8)	$\sim sol(a)$	[7,D*sol*]
	sprz.	[2,8]

T5.6b	$x\varepsilon Ca\wedge sol(sub(x)) \rightarrow sol(a)$	[D*sol*,T1.5,T2.5]
T5.6	$x\varepsilon Ca \rightarrow (sol(a) \leftrightarrow sol(sub(x)))$	[T5.6a,T5.6b]

Para nieuporządkowana i uporządkowana. Definicyjnie wprowadzimy też funktor *sumy* (*pary nieuporządkowanej*):

D*S* $x\varepsilon Sab \leftrightarrow x\varepsilon C(a\cup b)\wedge a\varepsilon a\wedge b\varepsilon b$ *x jest sumą a i b*

Do tez z funktorem S należą:

T6.1 $x\varepsilon Sab \to x\varepsilon Sba$

T6.2 $x\varepsilon Sab \wedge y\varepsilon Sab \to x\varepsilon y$

Dem.

(1)	$x\varepsilon Sab$	[z]
(2)	$y\varepsilon Sab$	[z]
(3)	$x\varepsilon C(acb)$	[1,DS]
(4)	$y\varepsilon C(acb)$	[2,DS]
(5)	$x\varepsilon y$	[3,4,T1.4]

T6.3 $sol(Sab)$ [T6.2,Dsol]

T6.4 $a\varepsilon a \wedge b\varepsilon b \wedge ex(Sab) \to Sab=C(acb)$

Dem.

(1)	$a\varepsilon a \wedge b\varepsilon b$	[z]
(2)	$ex(Sab)$	[z]
(3)	$\Pi x(x\varepsilon Sab \to x\varepsilon C(acb))$	[DS]
(4)	$Sab \subset C(acb)$	[3,D$\subset$]
(5)	$Sab\varepsilon C(acb)$	[2,4,T6.3,**OE**]
(6)	$sol(C(acb))$	[T1.5]
(7)	$Sab=C(acb)$	[5,6,**OE**]

T6.5 $a\varepsilon a \wedge b\varepsilon b \wedge x\varepsilon acb \to Sab=C(acb)$

Dem.

(1)	$a\varepsilon a \wedge b\varepsilon b$	[z]
(2)	$x\varepsilon acb$	[z]
(3)	$x\varepsilon sub(C(acb))$	[2,B1]
(4)	$C(acb)\varepsilon C(acb)$	[3,A3]
(5)	$C(acb)\varepsilon Sab$	[1,4,DS]
(6)	$sol(Sab)$	[T6.3]
(7)	$Sab=C(a\cup b)$	[5,6,**OE**]

T6.6 $a\varepsilon a \wedge b\varepsilon b \to \Pi u(u\in Sab$ ø $u=a$w$u=b)$

Dem.

(1)	$a\varepsilon a \wedge b\varepsilon b$	[z]
(2a)	$\Pi u.u\in Sab$	[zd1]
(2b)	$u\varepsilon sub(Sab)$	[2a,T5.1]
(2c)	$Sab\varepsilon Sab$	[2b,A3]
(2d)	$ex(Sab)$	[2c,**OE**]
(2e)	$Sab=C(a\cup b)$	[1,2d,T6.4]
(2f)	$u\varepsilon sub(C(a\cup b))$	[2b,2e]
(2g)	$u\varepsilon a\cup b$	[2f,T2.5]
(2h)	$u=a\vee u=b$	[1,2g,D=,**OE**]

(2)	$\Pi u(u \in Sab \rightarrow u=a \vee u=b)$	[2a → 2h]
(3a)	$\Pi u.u=a \vee u=b$	[zd2]
(3b)	$u \varepsilon a \cup b$	[3a,D=,D∪]
(3c)	$Sab=C(a \cup b)$	[1,3b,T6.5]
(3d)	$u \varepsilon sub(C(a \cup b))$	[3b,B1]
(3e)	$u \varepsilon sub(Sab)$	[3c,3d]
(3f)	$u \in Sab$	[3e,T5.1]
(3)	$\Pi u(u=a \vee u=b \rightarrow u \in Sab)$	[3a → 3f]
(4)	$\Pi u(u \in Sab \leftrightarrow u=a \vee u=b)$	[2,3]

Jak łatwo zauważyć, odpowiednikiem teoriomnogościowej pary nieuporządkowanej $\{a,b\}$ jest tu *Sab*. Pojęcie *pary uporządkowanej* wprowadzimy przez definicję (Wojciechowski, 2019b)[7]:

D*P* $x \varepsilon Pab \leftrightarrow x \varepsilon SCaSab \wedge ex(Ca) \wedge ex(Sab) \wedge a \varepsilon a \wedge b \varepsilon b$ *x jest parą-uporządkowaną a i b*

Do konsekwencji tej definicji należą:

T7.1 $x \varepsilon Pab \wedge y \varepsilon Pab \rightarrow x \varepsilon y$ [D*P*,D*S*,D ,A4,D*C*]

T7.2 $sol(Pab)$ [T7.1,D*sol*]

T7.3 $x \varepsilon Pab \wedge x \varepsilon Pcd \rightarrow a=c \wedge b=d$ [D*P*,T1.5,T2.9,T6.3,D*S*,**OE**]

Zdefiniujemy funktor mnożenia kartezjańskiego (Wojciechowski 2019b):

D× $x \varepsilon yHz \leftrightarrow x \varepsilon x \wedge \Pi uab(u \varepsilon Pab \wedge a \varepsilon y \wedge b \varepsilon z \leftrightarrow u \varepsilon sub(x))$

Odpowiedniki pewnych aksjomatów teorii mnogości. Ostatnia grupa tez to odpowiedniki wybranych aksjomatów teorii mnogości w jednym ze sformułowań (Batóg, 2003, s. 100)[8]:

T8.1 $Z(x) \wedge Z(y) \wedge \Pi z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x=y$ (*Aksjomat ekstensjonalności*)

Dem.

(1)	$Z(x) \wedge Z(y)$	[z]
(2)	$\Pi z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$	[z]
(3)	$\Pi z(z \varepsilon sub(x) \leftrightarrow z \varepsilon sub(y))$	[2,T5.1]
(4)	$sub(x) \bigcirc sub(y)$	[3,D○]
(5)	$x \bigcirc y$	[4,A4]
(6)	$x \varepsilon x \wedge y \varepsilon y$	[1,D*Z*,**OE**]
(7)	$x=y$	[5,6,**OE**]

---

7 Jest ona odpowiednikiem teoriomnogościowej definicji, której autorem jest Kazimierz Kuratowski: $<a,b> = \{\{a\},\{a,b\}\}$. Pomijamy dowody tez T7.1-T7.3, które zostały podane w (Wojciechowski, 2019b).

8 Zmieniamy tu nieistotnie notację i pomijamy kwantyfikatory zewnętrzne.

T8.2 $x\varepsilon x \wedge y\varepsilon y \rightarrow \Sigma z(Z(z) \wedge \Pi u(u \in z \leftrightarrow u=x \vee u=y))$ (*Aksjomat pary*)[9]

Dem.

(1)	$x\varepsilon x \wedge y\varepsilon y$	[z]
(2)	$\Pi u(u \in Sxy \leftrightarrow u=x \vee u=y)$	[1,T6.6]
(3a)	$\Pi u.\ u=x \Box u=y$	[zd1]
(3b)	$u \in Sxy$	[2,3a]
(3c)	$Z(Sxy)$	[3b,T5.2]
(3)	$\Pi u(u=x \vee u=y \rightarrow Z(Sxy))$	[3a → 3c]
(4)	$\Pi u(u \in Sxy \wedge Z(Sxy) \leftrightarrow u=x \vee u=y)$	[2,3]
(5)	$\Sigma z(\Pi u(Z(z) \wedge u \in z \leftrightarrow u=x \vee u=y))$	[4]
(6)	$\Sigma z(Z(z) \wedge \Pi u(u \in z \leftrightarrow u=x \vee u=y))$	[5]

T8.3 $Z(x) \rightarrow \Sigma y(Z(y) \wedge \Pi z(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$ (*Aksjomat wyróżniania*)

Dem.

(1)	$Z(x)$ [z]	
(2)	$\Sigma a.x\varepsilon Ca$	[1,DZ]
(3a)	$\Pi z.z \in Ca$	[zd1]
(3b)	$z\varepsilon sub(Ca)$	[3a,T5.1]
(3c)	$z\varepsilon a$	[3b.T2.5]
(3d)	$z\varepsilon sub(x)$	[2,3c,DC]
(3e)	$z \in x$	[3d,T5.1]
(3f)	$\varphi(z)$	[3c,T4.3]
(3h)	$z \in x \wedge \varphi(z)$	[3e,3f]
(4)	$\Pi z(z \in Ca \rightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$	[3a → 3h]
(4a)	$\Pi z.z \in x \wedge \varphi(z)$	[zd2]
(4b)	$z\varepsilon sub(x)$	[4a,D□]
(4c)	$x=Ca$	[2,T1.5,**OE**]
(4d)	$z\varepsilon sub(Ca)$	[4b,4c]
(4e)	$z \in Ca$	[4d,T5.1]
(4)	$\Pi z(z \in x \wedge \varphi(z) \rightarrow z\varepsilon Ca)$	[4a → 4e]

9 W typowym sformułowaniu teoriomnogościowym aksjomat ten wygląda prościej: $\forall xy \exists z(Z(z) \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u=x \vee u=y))$. Prostota tego zapisu wiąże się z egzystencjalnym obciążeniem kwantyfikatorów w teorii mnogości, ufundowanej na klasycznym rachunku predykatów z identycznością. Wszystkie zmienne i stałe nazwowe w klasycznym rachunku predykatów są nazwami jednostkowymi i referencjalnymi, w odróżnieniu od języka ontologii Leśniewskiego, z szerokim rozumieniem kategorii nazw. Adekwatne tłumaczenie formuł klasycznego rachunku predykatów poprzedzonych kwantyfikatorami (oraz teorii mnogości, która jest nad nim nadbudowana) na język ontologii Leśniewskiego podpada odpowiednio pod schematy: $\forall x\Phi(x)$ / $x\varepsilon x \rightarrow \Pi x\Phi(x)$ oraz $\exists x\Phi(x)$ / $\Sigma x(x\varepsilon x \wedge \Phi(x))$. Z tłumaczeniem kwantyfikatorów obecnych w sformułowaniach pozostałych aksjomatów na ich ontologiczne odpowiedniki sprawa wyglądała prościej, jako że zawierały one kwantyfikatory ograniczone i w odpowiednikach formuł ograniczających był obecny człon typu $x\varepsilon x$. Przykładowo, w formule ograniczającej typu $Z(x)$ jej odpowiednik dany przez definicję $Z(x) \leftrightarrow \Sigma a(x\varepsilon Ca)$ zawierał ten człon, bo z $\Sigma a(x\varepsilon Ca)$ wynika $x\varepsilon x$.

(5)	$\Pi z(z \in Ca ø z\varepsilon z \wedge \varphi(z))$	[3,4]
(6)	$x=Ca$	[2,T1.5,**OE**]
(7)	$Z(Ca)$	[1,6]
(8)	$Z(Ca) \wedge \Pi z(z \in Ca ø z\varepsilon z \wedge \varphi(z))$	[5,7]
(9)	$\Sigma y(Z(y) \wedge \Pi z(z \in y ø z\varepsilon z \wedge \varphi(z)))$	[8]

T8.4 $Z(x) \wedge \Pi y(y \in x \rightarrow Z(y)) \rightarrow \Sigma z(Z(z) \wedge \Pi u(u \in z \leftrightarrow \Sigma v(v \in x \wedge u \in v)))$ (*Aksjomat sumy*)

Dem.

(1)	$Z(x)$	[z]
(2)	$\Pi y(y \in x \rightarrow Z(y))$	[z]
(3)	$\Sigma a.x\varepsilon Ca$	[1,DZ]
(4)	$\Pi y(y\varepsilon sub(x) \rightarrow \Sigma b(y\varepsilon Cb))$	[2,T5.1,DZ]
(5)	$x=Ca$	[3,T1.5,**OE**]
(6)	$\Pi y(y\varepsilon sub(Ca) \rightarrow \Sigma b(y\varepsilon Cb))$	[1,4,5]
(7)	$\Pi y(y\varepsilon a \rightarrow \Sigma b(y\varepsilon Cb))$	[B1,6]
(8a)	$\Pi u.u \in Ca$	[zd1]
(8b)	$u\varepsilon sub(Ca)$	[8a,T5.1]
(8c)	$\Sigma b(u\varepsilon Cb)$	[6,8b]
(8c)	$u\varepsilon a$	[8a,T2.5]
(8d)	$Ca\varepsilon Ca$	[8b,A3]
(8e)	$Ca\varepsilon Ca \wedge u \in Ca$	[8a,8d]
(8f)	$\Sigma v(v \in Ca \wedge u \in v)$	[8e]
(8g)	$\Sigma v(v \in x \wedge u \in v)$	[5,8f]
(8)	$\Pi u(u \in Ca \rightarrow \Sigma v(v \in x \wedge u \in v))$	[8a → 8g]
(9a)	$\Pi u.\Sigma v.v \in x \wedge u \in v$	[zd2]
(9b)	Zv	[9a,2]
(9c)	$v \in Ca$	[9a,5]
(9d)	$v\varepsilon sub(Ca)$	[9c,T5.1]
(9e)	$u\varepsilon sub(v)$	[9a,D∈]
(9f)	$u\varepsilon sub(Ca)$	[9d,9e,T1.1]
(9g)	$u \in Ca$	[9f,T5.1]
(9)	$\Pi u(\Sigma v(v \in x \wedge u \in v) \rightarrow u \in Ca)$	[9a → 9g]
(10)	$\Pi u(u \in Ca \leftrightarrow \Sigma v(v \in x \wedge u \in v))$	[8,9]
(11)	$Z(Ca) \wedge \Pi u(u \in Ca \leftrightarrow \Sigma v(v \in x \wedge u \in v))$	[1,5,10]
(12)	$\Sigma z(Z(z) \wedge \Pi u(u \in z \leftrightarrow \Sigma v(v \in x \wedge u \in v)))$	[11]

Bibliografia

Batóg, T. (2003). *Podstawy logiki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.
Osawa, M., Waragai, T. (1985). Set Theory and Leśniewski's Ontology, *Annals of the Japan*
Association for Philosophy of Science 6 (5), s. 261–272.
Słupecki, J. (1955). St. Leśniewski's Calculus of Names. *Studia Logica* 3, s. 7–70.
Wojciechowski, E. (2019a). *Predykacja, negacja i kwantyfikacja*. Kraków: Aureus.
Wojciechowski, E. (2019b). Rachunek nazw i pojęcie pary uporządkowanej. *Kwartalnik Filozoficzny* 47 (3–4), s. 193–207.

The set theory in the name calculus

Abstract: The article attempts to interpret a certain part of the set theory as expressed by Zermelo-Fraenkel in the framework of elementary ontology with Frege's predication scheme enriched with certain specific axioms.

The set theory relation of *being an element* and the predicate of *set* are defined here. The concepts of *an unordered pair* and *ordered pair* in the form of functors are also introduced by definition.

Jan Woleński
University of Information, Technology and Management in Rzeszów
| ORCID: 0000-0001-7676-7839

The concept of Being, mereology and set theory

Abstract: The paper applies set theory to analysis of the concept of **Being** in its form offered by Parmenides, Plato, Aristotle, and developed among others by the Schoolmen, Leibniz, Brentano, as well as some contemporary philosophers. After presenting this theory and making comments on it, the perspective of analytic philosophy is briefly outlined. The author represents the orientation which recommends using formal tools in philosophical analysis. Consequently, this paper belongs to so-called formal ontology. Two concepts of set are distinguished, namely distributive and collective (mereological). Accordingly, **Being** can be analysed in the framework of the standard set theory and in mereology. The paper shows advantages and disadvantages of both approaches.

Keywords: ontology, set, class, mereology, individual, analytic philosophy

1. The traditional theory of being (TTB)

The traditional conception (theory) of being, arose in ancient Greece in works of Parmenides, Plato and Aristotle, It was continued by medieval philosophers, particularly, Thomas Aquinas and Duns Scotus, and then i.e. by Descartes, Spinoza, Leibniz, and Brentano (I mention only some of the most relevant names of the past, but omit contemporary thinkers). **TTB** can be summarized (see Kobusch et al., 1995; Orken, 1998) by the following basic theses (further explanations are after the list of statements of the theory of question; I use bold letters in the word **Being** in order to stress the relevance of this category in philosophy):

(1) The term "being" has three uses (i) distributive, (ii) collective, and (iii) formal;

(2) The concept of being (**CB** for brevity) the most general of all concepts;

(3) **CB** is transcendental (the explanation of this property will be given below) in its nature and it refers to **Being** as something real;

(4) The logical behaviour of **CB** is very peculiar with respect to the processes of generalization (passing from less general concepts to more general ones), specialization (that is, the reverse process to generalization), and infinitation (forming the concept non-*C* from the concept *C*—these three operations had a special importance in traditional logic;

(5) **Being** is subjected to some general principles, namely (I) every being (an instance of **Being**), which is, is (the principle of identity); (II) no being which is, is not (the principle of identity); (III) every being is or is not (the principle of the excluded middle); (IV) every being must have the reason (or cause) which explains its existence (the principle of sufficient reason).

The theses (1)–(5) belong to the branch of philosophy frequently called formal ontology understood as the most general theory of **Being** as contrasted with material ontology (or metaphysics; sometimes metaphysics and ontology are considered as the same or the latter considered as general metaphysics) interested in analysis of particular kinds of beings, for instance, physical and psychical as well as relations between them (the psychophysical problem in this case).

The theses (1)–(5) provoke some comments. I make the following (I do not claim to be particularly original in my observations—similar remarks were formulated in many encyclopaedias and monographs (for example, see contributions by Kobusch et al., 1995; Orken 1988; Czeżowski, 2004 and in Le Poidevin, Simons, McGonigal, and Cameron, 2009):

Ad (1) The meaning (I) can be explained by saying that the word "being" is synonymous with "something" or "object"; (II) identifies **Being** with **Everything** (the universe of all entities); (III) concerns **CB**.

Ad (2) There exists the entire hierarchy of beings, namely 0—the level of particular individuals (particulars), 1—the level of species of individuals, 2—the level of species of individuals, ..., n−1—the level of species of the n-1 level of the species of individuals; n—the level of **Being**. This hierarchy assumes the distributive sense of the term "being" (hence we can say the distributive **TTB**; the theory based on the collective understanding of **CB** will be considered in Section 4 below) and suggests existence of a very regular (ordered) ontological hierarchy starting from individuals and proceeding to their species, species of species, etc. and ending with **Being**. The problem is whether this hierarchy is merely conceptual or occurs in the reality as well. This question is related to the transparency of the distinction between **Being** and **CB** in every special case. Aristotle and the Schoolmen assumed that n-1 level consists of *ens per se* (being in itself; substances as individual entities composed from the matter and form) and *ens in alio* (being in something else; forms present in substances). Consequently, existing entities are unions (fusions) of two components: a concrete matter and the general form.

Ad (3) The principle *Ens omnia genera transcendit* (Being transcends all species; I do not use bold letters in translation) illuminates a very important fact, namely that even if we consider **Being** as a general category, its nature is very peculiar as compared with species of the levels from 1 to n–1. In particular, **Being** is not definable by the traditional formula *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam* (the process of defining proceeds by finding the closest species and the specific difference determining the defining species from a higher one—as in the case "square is rectangle with equal sides"), because there is nothing more general than **Being**—consequently, there is no specific difference to be used to define **Being** for there is no a higher species with respect to **Being**.

Ad (4) If *C* is general concept, its generalisation leads to the concept *C'* which is more general then a given concept *C* (for instance, square and rectangle); specialization proceeds reversely from more general *C'* to less general *C* (for instance, from rectangle to square), and infinitation consists in forming a negation of a given concept, for instance, non-square as infinitation of square. The peculiarity of **CB** consists in the fact that is cannot be generalized as well as the n–1 level does not rise via specialization of **CB** (in particular, qualification *per se* and *in alio* are not specific differences in the traditional sense (it is a problem with their status, but I skip this issue). Moreover, the operation of infinitation is not applicable to **CB**. An important consequence of the last setting is that the term "non-being" does not express any concept. This matter will be explored below.

(Ad 5). The principles of identity, contradiction, excluded middle and sufficient reason can be considered logically (as theorems of logic; in this role they were traditionally conceived as the highest principles of thinking) or ontologically, that is as the laws of **Being**. This dualism leads to some ambiguity consisting in the fact that the word "being" sometimes expresses **Being**, but sometimes **CB**. Three first are present in contemporary logic (more precisely, in the classical bivalent system, because intuitionism rejects the law of excluded middle, and paraconsistent logic limits the principle of contradiction), but the principle of the sufficient reason has no counterpart in formal logic.

Medieval philosophers, especially Thomas Aquinas, tried to illuminate the peculiar character of **Being** in the framework of the theory of transcendentals (*transcendentalia*), that is, concepts transcending all other notions. The most common list contains just three transcendentals, namely **Being**, **Truth** and **Goodness**. According to that theory, if *T* and *T'* are transcendentals they are mutually convertible (they have the same scope, although they differ in their content). A special case is illustrated by the formula *ens et verum convertuntur* (**Being** and **Truth** are convertible). Consequently, what is **Truth** is **Being** and reversely; similar principles concern **Being** and **Goodness** as well as **Truth** and **Goodness**. Further, the transcendentals (more precisely, transcendental concepts; note that the ontological/logical dualism is also present in the case of transcendental) are predicated not univocally on things (particular beings, entities), but analogically. The univocal predication adds something (typically, a property) to what is predicated about. For instance, if we predicate "is a square," we add the property of having equal sides to the property expressed by "is a rectangle." According to the traditional ontological theory (more precisely—in its scholastic version), only universals increase the content of predications by adding new properties to what has earlier been specified. The analogical mode of predication is not ambiguous, that is, it does not produce new meanings by their uses to different particular cases, but transcendentals are predicated in the same way on something. If I say that *a* is a being, *b* is a being, and so on, the term "being" has the same meaning in every case. Briefly speaking, **Being** and other transcendentals are not universals, but express so-called analogical predications (see also below). One interesting consequence of the theory of transcendentals concerns the status of nothing. Observe that the expression "false **Being**" does not refer to something non-existing for no adjective determine **Being**, that is, subsuming **Being** under something (a category) including false and non-false (true) **Being**. Consequently, "false" in "false **Being**" is a modifier, that is, it modifies (changes) the meaning of the word "Being"—false **Being** is no **Being**, but true **Being** is **Being**. We can put **Nothing** for false **Being**.

Although these settings do not fully explain the status of **Nothing**, let me remark that they can somehow temper well-known Heidegger's (and similar) speculations about Nothingness and its various performances in ontology and philosophical anthropology.

TTB as every fundamental philosophical theory rises many objections and interpretative problems. I earlier observed (see comments to Ad (4)) that there is a problems with an exact delimitation when we speak about **CB** and when about **Being**—this question repeats on many other occasions, for instance, to say once again, when we consider whether the principles listed in (5) apply to **CB** or to **Being**. It is easily to see that we encounter here a very typical situation, very frequently occurring in analytic philosophy, namely that it is not always clear when we speak about linguistic (or conceptual issues), but when our statements refer to the extralinguistic reality. Several essential problems arise with respect to the theory of transcendentals. The distinction of adjectives-determinators and adjectives-modifiers is correct, but it does not explain all aspects of the analogical mode of speaking. The same remark applies to the idea of reduplication (see Bãck, 1996), expressed by the locution *Ens qua ens* (**Being** as **Being**), which is intended to explain the analogical way of speaking about **Being**. Although it is clear that speaking ontologically about **Being**, we intend to say something about **Being** as such, but it is not transparent which propositions satisfy this constraint. Still another problem concerns the question of how many transcendentals exist. It is related to the problem whether we should accept the conception briefly ascribed above, that is, formulated by Thomas Aquinas (he followed Albert the Great in this respect) or Duns Scotus' theory of disjunctive transcendental concepts on which modalities can be considered as transcendental (see Woleński, 1997). According to Scotus, transcendentals are predicated univocally—he rejected the analogical conception of predication via transcendental concepts. Above I pointed out an advantage of Thomas Aquinas' theory of transcendentals, related to the status of **Nothing**. However, the convertibility thesis of **Being** and **Goodness** can be questioned, because it motivates the negative nature of evil—evil is the lack of goodness. Yet this account is not quite coherent with our perception of evils occurring in the reality in which we live. In this respect, Duns Scotus' proposal is more acceptable, because it allows to speak about evil as really existing.

2. Contemporary strategies of dealing with TTB

Roughly speaking, there are four general contemporary strategies dealing with **TTB**. Firstly, it can be continued without major changes as it is practiced in neo-Scholastic philosophy. Secondly, it be might be ignored as meaningless. This view was common in the Vienna Circle—philosophers of this group argued that since theses about **Being** cannot be empirically testable, they are meaningless and thereby without any scientific value. Thirdly, the traditional ontology can be developed (with more or less essential changes) as, for instance, in the case of Nicolai Hartmann (see Hartmann, 1935) or Roman Ingarden (see Ingarden, 2014–2016). The fourth strategy is used in analytic philosophy (also in this paper) and consists in elaborating particular theses on **Being** (or being if someone thinks that using bold letters confuses the issue) by applying various analytical tools—this approach can end with clarifications of some issues, proposing of acceptance of some results or both tasks. One stream in analytic ontology prefers analysis via taking seriously the ordinary way of speaking about objects (see for example Strawson, 1964), and the second opts for employing formal tools adopted from (mathematical) logic and mathematics. I will follow the last strategy, that is, that which employs formal tools—it can be illustrated, for example, by Quine's thesis on the ontological commitment (see Quine, 1948) that to exist is to be a value of a variable bounded by quantification, I do not suggest that the mentioned strategies are exclusive, for instance, some neo-Thomists tried to combine Aquinas' ideas with formal logic (see Salamucha, 2003), and analytic phenomenology is practiced by many present-days philosophers (see Haddock, 2016); also the earlier anti-metaphysical radicalism of logical empiricism was considerably tempered by later (after 1945) works of the representatives of this movement. Also analytic philosophy combines formal and informal tools, for instance, logical reconstructions are frequently preceded by informal explanations. This philosophical orientation can and should analyse traditional philosophical doctrines by its analytical tools. It is one of the principal tasks of the present paper.

3. Methodological remarks

Now I will make a fundamental methodological (or metaphilosophical) remark. What about the argumentative force of analysis by formal tools?

For instance, according to the Vienna Circle, logical analysis converts philosophy into science. I am not so optimistic. Take the following example. Some philosophers and scientists say that the uncertainly principle in quantum mechanics proves ontological indeterminism. However, this conclusion is ungrounded. The principle in question says that $\Delta p_1(x) \cdot \Delta p_2(x) \geq h/4\pi$ (the uncertainly of momentum of a particle x times the uncertainty of location of x is equal to $h/4\pi$ (h is Planck's constant) and does not contain the words "determinism" or "indeterminism." Consequently, the uncertainty principle say nothing about determinism (indeterminism) until this notion becomes defined, for instance, by accepting that the impossibility of an exact calculation of the simultaneous momentum and location of elementary particles is conceptually equivalent with indeterminism, because it makes impossible to strict predict the future behaviour of such objects. However, this definition essentially depends on a philosophical intuition (or a conception) on the structure and ordering of the reality and the conclusion in question is problematic as scientifically acceptable proof of indeterminism. Similarly, if someone uses the second-order logic which allows to quantify over predicates, for instance, $P\exists xPx$ (in words, there exists such P and there exists x such that Px; for example, there exists the predicate "is red" and there exists x such that x is red) does not imply that properties exist as autonomous entities, like things, even if we assume that predicates express properties and individuals (as bearers of properties) exist in a basic sense. I agree that the issue in question appears as considerably controversial. What I would like to say is that scientific paraphrases (I prefer this way of speaking, over using such words as "translations" or "interpretations") illuminate philosophical problems and their solutions, even if we consider them as not conclusive. In other words and contrary to some views (for instance, as in Bremer, 2010), set theory is not a formal ontology, but a possible source of dealing with traditional ontological byt the way of paraphrases. This is my methodological credo related to premises taken from science (including logic and mathematics) and used in philosophical analysis.

4. Conceptions of set and the theory of Being

The distinction of distributive and collective use of the term "being" immediately invites set theory to considerations of **Being**. Let me start with the second meaning. We can identify collectively understood sets as mereological classes (an advanced theory in question going back to

Stanisław Leśniewski (see Leśniewski, 1916). Such an entity, that is, a mereological class *the word "set" is also admissible in this context) is determined by the parthood relation and the way of composition of a whole from its parts (see Simons, 1987; Lando, 2017; Pietruszczak 2020; Cotnoir and Varzi, 2021; two last works contains an advanced formal theory). The basic principle of mereology is that if *a* is a mereological element of *b* and *b* is a mereological element of *c*, then *a* is a mereological element of *c*. For instance, my left hand has five fingers and is a part of my body—hence every finger from my left hand is a part of my body. Formally speaking, being an element is a transitive relation in mereology, contrary to the situation in set theory, because if *x* is a member of set *X* and *X* is an element of a family *Y* of sets, then *x* is not a member of *Y*.

Let **Being** is a mereological class. At the first sight it is a promising ontological idea, which presumably illuminates the concept of **Everything**. Thus, **Everything** considers every thing (object, entity) as a part of a certain whole. Clearly, if *a* is part of **Everything**, then any part of *a* belong (in the mereological sense) is a part of **Everything**. It is also possible to use so-called atomistic mereology, that is, the theory which assumes that there exist elementary units (for instance, atoms or elementary particles) of the reality of which all things are composed. The next ontological principle states that if *a* and *b* are mereological objects their sum (composition, union) is also a merelogical object—this rule can be extended to compositions consisting of arbitrary finite number of elements. **Being** in this sense is a singular objects, because **Everything** is unique (so we can write the **Everything**, but I skip the definite article from the statements on **Being** and **Everything**). **Being** in the mereological sense is the highest entity, because nothing exists outside its frontiers—it can be considered as equivalent to the statement "**Being** is the most general category," but one should remember that it is another understanding of generality than in the case of the distributive **TTB**. The principle of transitivity of the relation "being an element of a mereological class" is satisfied, although **Being** does not belong to any higher composition (mereology does not require the principle that every mereological class is an element of a mereological class). A straightforward consequence of the mereological theory of **Being** is that there is no **Nothing**, because it does not belong to **Everything** (more literally, **Nothing** does not exist, because it is not a mereological element of any mereological collection).

So far, so good, but we have some problematic points as well, because mereology is not free of conceptual difficulties. Is any criterion of distinguish autonomous parts and non-autonomous ones, for example, is a fragment of my finger a part of my body in the same sense as the entire hand? What about mereological infinities, if we presume that such exist at all? Is any pair of mereological elements a mereological part? For instance, is the pair <my finger, New York> a mereological part of **Everything**? Is a colour a part of a coloured object? Other doubts are related to some theses about **CB**? In which sense the concept of **Everything** is the most general concept? If we say that because **Everything** includes everything (every object), this answer is conventional and proposes a completely new understanding of the generality of notions. Although the operation of infinitation can be performed on **Everything** and leads to the concept of **Nothing,** generalization is pointless for **Being** in the collective sense, because it exhausts **Everything** (however, this analysis subsumes **Being** under the concept of mereological class)—specialization seems out of the question as well for the concept of the specific difference is not applicable to this understanding of **CB** . The idea of ontological levels is not applicable, similarly as the theory of transcendentals. Perhaps there is no reason for regretting of the last point, but the fact is that conceptual resources of ontological mereology look as too poor in order to cover the all aspects of the traditional idea of **Being**. It is not surprising, because motivations for developing any ontological theory are typically more complex than reasons leading to constructing of a formal theory.

The last sentence motivates a closer analysis of the distributive sense of the term "being." It is related to sets understood in the distributive sense, that is, as a collection of objects sharing a common property. These entities are studied in set theory. Since there is a variety of set theories (see Fraenkel, Bar-Hillel, and Levy, 1973 for a survey; let me remark that I skip the theory of logical types and category theory, although all have interesting ontological applications), we should choose something as a device of analysing **Being** in the distributive sense**.** Due to the hierarchy described in Ad (2) above, the system with individuals and sets of individuals is the most convenient (roughly speaking, it is an intuitive version of Zermelo-Fraenkel set theory). It is based on the iterative conception of set on which sets appear in stages (see Incurvati, 2020, Chapters 2–3). Firstly, we have individuals that are not sets (it is level 0), then sets of individuals (level 1), sets of sets of individuals and so on. Secondly, this hierarchy is related to the fact that if X is an element of a set Y and X is an element of a set Z (typically, a family of sets, then X is not element of Z (the relation of being of an element of a set is not transitive).

The analogy of the iterative hierarchy of sets with levels of **Being** is straightforward. However, since the iterative levels form an infinite hierarchy, correlated with more and more general concepts, there is no place for **Being** in this scheme, if **CB** is assumed to be the most general concept. The distinction of sets and proper classes can help in this respect. Consider the entity **V** to which refers the name "set of all sets." It seems to be the greatest set, that is, containing all sets. However, because if X is set, then its power set 2^X is greater than X. Thus, **V** cannot be considered as a set. It is a proper class—that is (it is an intuitive explanation; moreover, I assume Zermelo-Fraenkel system in which prober classes are "outside" this system) a collection of items, which is too big in order to be a set (see Fraenkel, Bar-Hillel, and Levy, 1973, Chapter 2§7 for a formal treatment of set theory with classes, and Levy, 1979, Chapter 1, Sections 3–4 for an intuitive treatment). In particular, classes, called proper, are not elements of sets or other classes—but sets can be elements of other sets. Applying the above ideas to **Being**, we can say that **Being** in the distributive sense is not a set, but a class or a collection of all objects x which satisfy the formula $x = x$. This definition is quite natural, because it uses the principle of identity, one of fundamental theorems on **Being**. Moreover, **CB** remains the most general ontological concept. Set theory also gives some hints for explaining transcendentality of **Being** for proper classes transcend sets—note that the use of the word "transcend" in this context stems from philosophy and it is redundant from the mathematical point of view (it is an example of a philosophical paraphrase in the above sense). Moreover, we can try to argue that statements about sets are univocal, but about classes—merely analogical, because typical denominations about sets do not apply to classes, for instance, the latter cannot be subsets of something else.

Although set theory offers new and interesting possibilities for analysing **Being** and **CB**, it would be too rush to speak that we have exact paraphrases of ontology into set theory. The infinite hierarchy of set theoretical iterative levels does not fully correspond with our intuitions on **Being**. Perhaps a radical Platonist would be happy with seeing **Being** as the transcendental completion of the infinite sequence of more and more general ideas. Such a philosopher could add that it is possible to present set theory as a theory of pure sets without taking individuals (such systems were offered by Paul Bernays and John von Neumann; see Fraenkel, Bar-Hillel, and Levy, 1973, Chapter 2§7) into account (speaking in Plato's way, individuals appear as shadows of forms). Yet set theory is much richer than its outlined ontological interpretation, independently of its Platonic reading or any other proposed by philosophers. **Being** is one and only one, but we have many classes, for instance, the class of all ordinals. Also some axioms of set theory, for instance, the axiom of choice have no philosophical-ontological content. Denote by **AX** the collection of axioms of set theory without the axioms of choice (**AC** for brevity). Consequently, providing that the set **AX** of axioms is consistent, both sets **AX** ∪ {**AC**} and **AX** ∪ {¬**AC**} are consistent as well and have models (this means that AC axiom is independent of **AX**). However, both models are different, because one validates **AC** but the other its negation. Which model accounts the Platonic realm of form? This fact makes impossible or at least very complicated to combine set theory with Plato's ontology, even without speculating which class illuminates all other forms. Although the slogan that set theory provides the most general ontology for science, especially for mathematics, is very popular, its actual content and the considerable variety of problems exceed the traditional theory of **Being** in many respects. Although set theory has important and fascinating ontological issues in itself as well as several interesting applications in general ontology, it cannot replace this part of philosophy. And reversely, formal ontology cannot replace set theory.

Let me return to the collective understanding of being. I pointed out its weak points. Some are related to various internal difficulties of the concept of the mereological class, but other stem from assuming that the hierarchy of levels of **Being** applies to its collective sense. However, this assumption is not correct, because **Everything** as a mereological class is not structured in such a way as **Being** in the distributive understanding. Looking at the situation from a general ontological view, the collective account of **Being** suggests its nominalistic and reeistic (or naturalistic) interpretation, anticipated by Brentano and continued by Tadeusz Kotarbiński (see Kotarbiński, 1966). **Being** as **Everything** is, as I already noted above, a singular (individual) objects to which the idea of levels (in the set-theoretic sense) is not applicable. It consists from parts also existing as individual entities—once again, if X is a mereological class (whole), Y is a sub-whole of X and Z is a sub-whole of Y, then Z is a sub-whole of X (it is another formulation of a mereological principle that the relation of element-hood is transitive—an element of an element of a given mereological composition is an element of this composition). A very natural reading of the collective theory of **Being** consists in taking it as the spatiotemporal (physical) maximal object having various spatiotemporal parts. A small step converts this theory into traditional materialism provided that physical objects are identified with material entities. Although it is not quite certain that a physical theory of everything (I do not uses bold letters in this place) is possible at all, various fragments (parts) of **Being** can be collected into sets (not only classes as mereological collections) and analysed by formal set-theoretical tools. However, such analytic performances have merely a conceptual status, for instance, one can speak about species of individuals but only with respect to entities abstracted from **Being (Everything)**.

Is there any compromise between the mereological and the distributive conception of **Being**? The answer is positive and has a historical illustration, namely Aristotelism. It was a middle way out of Democtritus' materialism and Plato's idealism. Substances as unions of general form and singular matter can be viewed as individuals belonging to species conceived as sets, that is, having properties. According to Aristotle, substances exist autonomously (*ens per se*), but forms only in substances (*ens et alio*). Thus, set theory with individuals can be viewed as the best fitting to intuitions of the Stagirite and his followers. This conception legitimizes the hierarchy of the levels of **Being** and several other mentioned ontological theses of the traditional ontology, because it can be supplemented by the idea of classes which are not sets. The Aristotelian-like set theoretical ontology, as it is expected, inherits several difficulties of the Platonic-like theory related to the fact that there are various proper classes and various set-theoretical theorems which have no direct relevance to the theory of **Being**. One problem is very special. The iterative hierarchy of sets is infinite, but the Aristotelian conception ends the ontological hierarchy with *ens per se* and *ens in alio* as the highest kinds (species) of sub-**Being**. Yet there is no set-theoretical justification for this limitation—it is governed by a very special philosophical intuition. Even if we resign from the entire many-level ("many" means n > 2) hierarchy of beings and stay with individuals and their properties referring to sets, the problem what is **Being** as **Being** remains. Because it is not a set. It shows that **TTB** can be transformed into the two-level ontology.

My own ontological sympathies are with the mereological concept of **Being,** although, according to my previous remarks on abstracting from **Everything**, I see fairly plausible to analyse various being-localities (local ontologies) as subjected to distributive **CB**, for instance, the system of biological organisms (this approach is not Aristotelian), but such constructions are abstracted from **Being**, although I do not claim that they exist as abstract entities, because they have real substrata. Yet set theory does not justify such an account in such a way as happens in mathematics, pure or applied. I was rather trying to show that set theory and mereology, understood as mathematical theories, illuminate (see my earlier remarks on paraphrases) some aspects of **Being** in a way which can be interesting for analytic philosophy (and perhaps for other philosophical currents, but I am not in position to assess this possibility). Although the apparatus used above is rather elementary, it allows paraphrase many (not all, to be sure) traditional statements on **Being** by using a language which is perhaps more intelligible than the traditional ontological way of speaking, at least to customers logical analysis. For instance, to say that **Being** is more like as a proper class than a set (as an entity determined by axioms of set theory) better enlightens some controversial traditional ontological problems than the old language which considers **Everything** as the biggest set, but in other cases as simply a set. And one final remark is in order. Set theory is a special field having own philosophical problems (see Potter, 2004; Tiles, 2004; Bremer, 2010), particularly ontological ones, for instance, concerning how to interpret such as existing entities or whether infinities exist really. Although such problems overlap with the ontology of **Being**, they are usually regarded as autonomous and belonging to the philosophy of set theory as such.

References

Bǎck, A.T. (1996). *On Reduplication: Logical Theories of Qualification*. Leiden: Brill.

Bremer, M. (2010). *Universality in Set Theories: A Study in Formal Ontology*. Berlin: Ontos Verlag.

Cotnoir, A. and Varzi, A. (2021). *Mereology*. Oxford: Oxford University Press.

Czeżowski, T. (2004). *O metafizyce, jej kierunkach i zagadnieniach*. Kęty: Antyk.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., and Levy, A. (1983). *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North Holland.

Haddock, G. (Ed.). (2016). *Husserl and Analytic Philosophy*. Berlin: de Gruyter.

Hartmann, N. (1935). *Zur Grundlegung der Ontologie*. Berlin: de Gruyter.

Henry, P.D. (1972). *Medieval Logic and Metaphysics*. Hutchison: London.

Henry, P.D. (1991). *Medieval Mereology*. Amsterdam: B.R. Grüner.

Incurvati, L. (2020). *Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ingarden, R. (2014–2016). *Controversy over the Existence of the World* (Vols. 1–2). Frankfurt a.M: Peter Lang

Kobusch, T. et al. (1995). Sein, Seiendes. In J. Riiter and K. Gründer (Eds.), *Historisches Wörterbuch der Philosophie* (Vol. 9, pp. 170–234). Basel: Schwabe Verlag.

Kotarbiński, T. (1966). *Gnosiology: The Scientific Approach to the Theory of Knowledge*. Oxford: Pergamon Press 1966

Lando, G. (2017). *Mereology: A Philosophical Introduction*. London: Bloomsbury.

Le Poidevin, R., Simons, P., McGonigal, A., and Cameron, R. (Eds.). (2009). *A Companion to Metaphysics*. London: Routledge.

Leśniewski, S. (1916). *Podstawy ogólnej teorii mnogości I*. Moskva: Prace Polskiego Koła Naukowego [Eng. transl. Leśniewski, S. (1992). Foundations of the General Theory of Sets I. In S. Leśniewski, *Collected Works* (Vol. 1, pp. 129–173). The Hague: Nijhoff].

Levy, A. (1979). *Basic Set Theory*. Berlin: Springer Verlag .

Orken, M. (1998). Being. In E. Craig (Ed.), *The Encyclopedia of Philosophy* (Vol. 1, pp. 699–702). New York: Macmillan.

Pietruszczak, A. (2020). *Foundations of the Theory of Parthood: A Study of Mereology*. Cham: Springer Nature.

Potter, M. (2004). *Set Theory and Its Philosophy*. Oxford: Clarendon Press.

Quine, W.V.O. (1948). On what there is. *Review of Metaphysics*, *2*, 21–38. [Reprinted In Quine, W.V.O. (1953). *From a Logical Point of View* (pp. 1–19). Cambridge, MA: Harvard University Press].

Salamucha, J. (2003). On the possibilities of the strict formalization of the domain of analogical notions. In J. Salamucha, *Knowledge and Faith* (pp. 71–96). Amsterdam: Rodopi.

Simons, P. (1987). *Parts: A Study in Ontology*, Oxford: Oxford University Press.

Strawson, P. (1964). *Individuals: An Essay in Descriptive Metaphysics*. London: Taylor & Francis.

Tiles, M. (2004). *The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantor's Paradise*. New York: Dover Books.

Woleński, J. (1997). Two theories of transcendentals. *Axiomathes*, *8*, 367–380.

Richard Zuber

Centre national de la recherche scientifique, Paris (professor emeritus)

| ORCID: 0000-0002-1457-7826

On unary deductive rules and additivity of the consequence relation

Abstract: Some simple properties of the logical consequence relation generated by one-premiss deductive rules, or *unary* rules are studied. It is shown in particular that such systems are strongly additive. In addition a relationship between systems with unary rules and systems which are completely syntactically characterised is indicated.

Various modifications of the classical consequence relation (or consequence operation) have been proposed. Such modification consist in either the suppression o rthe weakening of one of the basic properties of the classical consequence relation or, informally, in there formulation of the relation implicitly indicated holding between the set of premisses and the set corresponding to consequences of the given consequence relation. For instance when one suppresses the condition of monotonicity one obtains a class of various non-monotonic logical (deductive) systems. The property of reflexivity, and even of idempotence, can also be supressed or modified. Furthermore, since the consequence operation determines a particular relation between a set of premisses and a set of conclusions this relation can also be modified in various ways. When objects of the consequence relation are semantically interpreted one can consider for instance multiple conclusion systems which induce conjunctive reading of premisses and disjunctive reading of conclusions. In other words in such multiple-conclusion systems we get syntactically many conclusions but is enough that only one of the is true (if premisses are true). Zygmunt (1984) studies matrix semantics for such multiple conclusion systems. In this note I am interested in some properties of the consequence relation, involving, informally, one premiss rules. In particular I relate one premiss consequence relation to the property of additivity.

A (one argument) function F whose argument is a set is strongly additive, s-additive, iff the following holds:

D1: F is s-additive iff $F(X) = \bigcup_{\alpha \in X} F(\{\alpha\})$, for any $X \neq \emptyset$ and $F(\emptyset) = \emptyset$.

Strong additivity entails additivity. That is we have:

Fact 1: If F is strongly additive then for any set X, Y one has $F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$.

Let C be the classical consequence relation, that is a function from sets to sets which is reflexive (that is $X \subseteq C(X)$), monotonic (if $X \subseteq Y$ then $C(C) \subseteq C(Y)$) and idempotent ($C(C(C)) \subseteq C(C)$). For such C holds (cf. Pogorzelski, 1975):

Fact 2: If C is a consequence operation then for any set X, Y, Z one has: if $X \subseteq C(Y)$ and $Y \subseteq C(Z)$ then $X \subseteq C(Z)$.

Moreover, C is finiststic (or compact) if it satisfies definition D2:

D2: C is finitistic iff $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \textit{ and } Y \textit{ is finite}\}$.

The classical consequence, even finitistic, considered as a function on sets, is not additive and thus not s-additive. It follows from the fact the consequence operation is monotonic that it is only ”one way” additive, that is the following fact holds:

Fact 3: If C is a consequence relation then $\bigcup_{\alpha \in X} C(\{\alpha\}) \subseteq C(X)$.

My goal is to define a class of consequence relations which are additive and even s-additive. This will be done using the rule induced consequence relation. The rules that will be used are given in so-called Hilbert style (as opposed to Gentzen style). As we will see consequence relations with one-premiss rules are such relations.

Let S be a set (say, of sentences). Recall the following definition of deductive rules (cf. Pogorzelski, 1975):

D3: r is a deductive rule over$S$, $r \in R_S$, iff the following conditions are satisfied:

(I) $\emptyset \neq r \subseteq 2^S \times S$
(II) $\exists_{0 \neq n \in \mathrm{N}} \forall_{X \subseteq L} \forall_{\alpha \in L} (\langle \Pi, \alpha \rangle \in r \Rightarrow card(X) = n)$

Thus a deductive rule r is a set of sequents of the form $\langle \Pi, \alpha \rangle$, where Π is a set of sentences which can be of any finite cardinality; Π is the se t of premisses (of the sequent).

Unary deductive rules are defined as follows (cf. Zuber, 1992):

D4: The deductive rule r is unary, in notation $r \in UN$,
iff $\forall_{\langle \Pi, \alpha \rangle \in r} card(\Pi) = 1$

Thus a deductive rule r is an unary rule all its sequents have a singleton as set of premisses.

The consequence operation Cn generated by rules R is defined as:

D5: $Cn(R, X)$ is the smallest set which includes the set X and which is closed with respect to the set R of rules.

From definition D5 follows the following proposition (Pogorzelski, 1975):

Proposition 1: $\alpha \in Cn(R,X)$ iff $\exists \beta (\beta \in Cn(R,X) \wedge \exists r (r \in R) \wedge \langle \beta, \alpha \rangle \in r$.

The function Cn can be equivalently defined using the inductive definition (cf. Borkowski, 1971) as in Proposition 1:

Proposition 2: (I) $Cn^0(R, A) = A$
(II) $Cn^{n+1}(R, A) = Cn^n(R, A) \cup \{\alpha \in S : \exists_{r \in R} \exists_{\pi \in Cn^n(R, A)} <\Pi, \alpha> r\}$
(III) $Cn(R, A) = \bigcup_{n \in N} Cn^n(R, A)$

The consequence operation generated by the set of rules has the usual properties of the consequence relation C: it is reflexive, monotonic with respect to the set X and the set $R$of rules) and it is idempotent. Moreover, using definition D5 one can prove the following (cf. Borkowski, 1971, lemma L2.1):

Proposition 3: $Cn(R,A) = \{\alpha \in S : \forall_{Y \subseteq S} (A \subseteq Y \wedge Cl_R(Y) \Rightarrow \alpha \in Y\}$

Thus the set $Cn(R,A)$ corresponds to the intersection of all sets containing A and closedwith respect to the set R of rules. In other words the set $Cn(R,X)$ is the smallest set which contains X and which is closed with respect to$R$.

We will now apply the definitions given above to indicate some properties of systems generated by unary rules. First we prove the following:

Proposition 4: Let $R \subseteq UN$. Then the consequence operation $C(X) = Cn(R,X)$ is s-additive.

Proof: Given Fact 1 and the fact that C is a consequence operation it is enough to prove that $Cn(R,X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in X} Cn(\{\alpha\})$. We prove this by induction on the degree consequence n using Proposition 1 by showing that $Cn^n(R, X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in X} Cn(R,\{\alpha\})$ for any $n \in N$. Clearly we have $Cn^0(R,X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in X} Cn(R,\{\alpha\})$. Suppose, by induction, that $Cn^n(R,X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in X} Cn(\{\alpha\})$ and let $\alpha \in Cn^{n+1}(R, X)$. This means that either $\alpha \in Cn^n(R, X)$ and we are done by the inductive supposition, or, if not, for some $\beta \in Cn^n(R,X)$ and for some $r \in R$ we have $\langle \beta,\alpha \rangle \in r$. But then, given the inductive assumption $\beta \in Cn(R,\{\gamma\})$ for some $\gamma \in X$. Hence, given Fact 2, $\alpha \in Cn(R,\{\gamma\})$.

Thus any consequence relation generated by unary rules is s-additive.We show now that for any s-additive consequence operation C the reexistsarulegenerated consequence operation Cn such that $C = Cn$.More precisely we have the following proposition:

Proposition 5: A consequence operation is s-additive iff it is finitistic and additive.

Since rule induced consequence operations are finitistic, consequence operations induced by unary rules are s-additive. The following proposition relates an s-additive consequence relation with a specific set of unary rules:

Proposition 6: Let C bean s-additive consequence operation. Then there exist a set $R(C)$ of unary rules such that $C(X) = Cn(R(C),X)$, for any set X.

Proof: Let C bean s-additive consequence operation. Define the set $R(C)$ of deductive rules r in the following way: $r \in R(C)$ iff $r = \{\langle \alpha,\beta \rangle :$ $\beta \in C(\{\alpha\}) \wedge \alpha \neq \beta$. We show that then $C(X) = Cn(R(C), X)$. Suppose that $\alpha \in C(X)$. Since C is s-additive this means that we have $\alpha \in C(\{\beta\})$for some $\beta \in X$. From this it follows that $\langle \beta,\alpha \rangle \in r$ and $r \in R(C)$ and thus $\alpha \in Cn(\{r\},\{\beta\})$. Hence, given the monotonicity (with respect to the set of both arguments of Cn) we have $\alpha \in Cn(R(C), X)$.

To prove the inclusion in the other direction, that is that $Cn(R(C),X) \subseteq C(X)$, we show first that the set $C(X)$ is closed with respect to the set of rules $R(C)$. Suppose that $\langle \alpha,\beta \rangle \in R(C)$. This means, given the definition of $R(C)$, that $\beta \in C(\{\alpha\})$. To show that $C(X)$ is closed with respect to $\langle \alpha,\beta \rangle$ suppose that $\alpha \in C(X)$. Then, given Fact 2, $\beta \in C(X)$. Consequently, if $x \in Cn(R(C), X)$ then, given Proposition 1, there exists $y \in Cn(R(C), X)$ such that $\langle y,x \rangle \in R(C)$. But then $x \in C(X)$.

The following proposition indicates another property of the consequence relation generated by unary rules:

Proposition 7: If $R \subseteq UN$ then $\forall_{\alpha,\beta\in S}\forall_{r\in R}(\langle\beta,\alpha\rangle \in r \Rightarrow (Cn(R,\{\alpha\}) \subseteq Cn(R,\{\beta\})$

Proof: We show by induction on n that $Cn^n(R,\{\alpha\}) \subseteq Cn(R,\{\beta\})$ for any $n \in \mathrm{N}$. This is true for n=0 because $\langle\beta,\alpha\rangle \in r$ and $r \in R$. Suppose this is true for some n and let $\gamma \in Cn^{n+1}(R,\{\alpha\})$. Then $\gamma \in Cn^n(R,\{\alpha\})$ and this is enough given the inductive supposition or $\exists\partial \in Cn^n(R,\{\alpha\})$ and $\exists_{r\in R}(\langle\partial,\alpha\rangle \in r$ such that $\langle\partial,\gamma\rangle \in r$. But then, given inductive supposition, $\partial \in Cn(R,\{\beta\})$ and thus $\gamma \in Cn(R,\{\beta\})$.

We also have:

Proposition 8: If $R \subseteq UN$ then $\alpha \in Cn(R,X)$ iff $\exists_{\beta\in X}(Cn(R,\{\alpha\}) \subseteq Cn(R,\{\beta\})$.

Proof: The implication from right to left is obvious given there flexivity and monotonicity of Cn.

To prove the implication from left to right we show by induction that if $\alpha \in Cn^n(R,X)$ then $\exists_{\beta\in X}(Cn(R,\{\alpha\}) \subseteq Cn(R,\{\beta\})$, for any $n \in \mathrm{N}$. This is true for $n = 0$ because in this case $\alpha = \beta$. Suppose, by induction that this holds for some $n \in \mathrm{N}$ and let $\alpha \in Cn^{n+1}(R,X)$. Then either $\alpha \in Cn^n(R,X)$ and then we are done or, if not, given the clause (II) of Proposition 1, $\exists_\gamma(\gamma \in Cn^n(R,X)$ and $\exists_r(r \in R)$ such that $\langle\gamma,\alpha\rangle \in r$. But then, given the inductive supposition, for some $\partial \in X$ we have $Cn(R,\{\partial\}) \subseteq Cn(R,\{\gamma\})$.

The property indicated in Proposition 8 can be used to characterise a special class of consequence relation (not necessarily generated by rules) and which can be called a *unary consequence relation*. By definition:

D6: The consequence relation C is an *unary consequence* relation, $C \in UNC$ iff $\alpha \in C(X)$ iff $\exists\beta \in X(\alpha \in C(\{\beta\}))$, for any $X \in S$.

Observe that strictly speaking definition D6 is just a reformulation of the definition of s-additivity given in D1. In other words we have the following proposition:

Proposition 9: $C \in UNC$ iff C is s-additive¿

I conclude by some remarks concerning the possibility of application of systems with unary rules. As I see *i*, such systems can be used to present various (but not all) so-called *rejection systems* or systems giving a full syntactic characterisation of logical systems, as suggested by Łukasiewicz(see Łukasiewicz, 1951; Skura, 1985; Słupecki, 1953). In such systems, informally, the "non-consequences" can also be derived ("deduced") by specific rules from an "axiomatically" given set of rejected sentences. If the set of ("normal") consequences is disjoint with the set of non-consequences and the union of both these sets equals the set S of all sentences we say that the given system is fully syntactically characterised (by the set of "normal" rules and the set of rejection rules).

Observe now that with any unary rules r we cam associate its converse r^{-1} such that $r^{-1}=\langle\beta,\alpha\rangle$ iff $r=\langle\alpha,\beta\rangle$.Similarly with the set R of rules we associate the set R^{-1} of converses of its members. Given this correspondence the following fact concerning sets closed with respect to unary rule sholds (Zuber, 1992):

Fact 4: If $R\subseteq U\, n$ then for any $A\subseteq S$ A is closed with respect to R iff A' is closed with respect to R^{-1}, where A' is the Boolean complement of A.

Fact 4 can be used to indicate the conditions of existence of finite set of "rejected" axioms from which all "non-consequences" of some particular systems can be obtained (Zuber, 1992).

References

Borkowski, L. (1971). Some theorems on the smallest sets closed under the classes of relations and their generalisations. I, *Studia Logica* 29, 43-72.

Łukasiewicz, J. (1951). *Aristottles's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Pogorzelski,W.A. (1975). *Klasyczny rachunek zdań*, Warszawa: PWN.

Skura,T.(2010). Refutation systems in propositional logic. In D. Gabbay and F. Guenthner (Eds.), *Handbook of Philosophical Logic* (pp. 115–157). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Słupecki, J. (1953). Funkcja Łukasiewicza, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Wrocławskiego seria B*, *3*, 33-40.

Zuber, R. (1992). A note on unary rules and a complete syntactic characterisation of propositional calculi. *Bulletin of Section of Logic*, *21*(4), 163-167.

Zygmunt, J. (1984). *An Essay in Matrix Semantics for Consequence Relations*, Wrocław: Wydawnictwo UniwersytetuWrocławskiego.

Uniwersytet
Wrocławski

Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego

ul. F. Joliot-Curie 12
50-383 Wrocław
wydawnictwo@uwr.edu.pl